

Sur les représentations unitaires des groupes pseudo-orthogonaux

Thèse présentée à la Faculté des sciences
de l'Université de Neuchâtel
pour l'obtention du grade de docteur ès sciences

par

Michel Romerio
physicien diplômé

1969

Décembre 1968

Sur les représentations unitaires des
groupes pseudo-orthogonaux

Thèse présentée à la Faculté des sciences
de l'Université de Neuchâtel
pour l'obtention du grade de docteur ès sciences

par

Michel Romerio
physicien diplômé

Décembre 1968

C'est assez qu'un navire avance
Si je comprends ce qui le meut

Aragon : Le nouveau crève-cœur.

INTRODUCTION

Dans la théorie de la représentation des groupes, la notion de caractère, lorsqu'il est possible de la définir, joue un rôle fondamental dans la décomposition de l'algèbre de groupe en facteurs irréductibles. Il est souvent possible, lorsque le groupe possède un sous-groupe compact, de caractériser un nombre important de représentations irréductibles à l'aide de certaines sous-algèbres de l'algèbre de groupe : ce sont les fonctions sphériques. Ces sous-algèbres, notées $L(\delta)$, sont plus précisément déterminées à l'aide des représentations irréductibles δ du sous-groupe compact mentionné.

Si les algèbres $L(\delta)$ sont commutatives, les fonctions sphériques satisfont à une équation fonctionnelle qui fournit les homomorphismes continus de $L(\delta)$ dans $\mathbb{C}$. Les fonctions sphériques possédant cette propriété caractérisent de plus certaines classes de représentations continues dans un espace de Hilbert. Il est finalement possible d'avoir, dans ce cas, un analogue de la formule de Plancherel pour les transformées sphériques de $L(\delta)$.

Gelfand, Naïmark et Harish-Chandra ont obtenu des résultats complets à ce sujet pour les groupes de Lie semi-simples complexes. Néanmoins, malgré les impressionnants travaux qui ne cessent de paraître dans ce domaine, le cas des groupes de Lie semi-simples réels demeure partiellement ouvert. Il paraissait donc utile d'étudier ce genre de question sur un groupe particulier.

Dans cette direction, R. Takahashi* a étudié d'une façon très détaillée les groupes de Lorentz généralisés, c'est-à-dire les sous-groupes de Lie de $GL(n+1, \mathbb{R})$ formés des éléments laissant invariant la forme quadratique indéfinie $-X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$. Dans ce travail, Takahashi détermine essentiellement l'ensemble des représentations de classe 1 des groupes de Lorentz généralisés; aussi est-il très rapidement amené à calculer les fonctions sphériques associées à ces représentations.

*(R. Takahashi, Bull. Soc. Math. Fr., t. 91, (1963) p. 289-433)

Par inversion d'une équation intégrale du type d'Abel, il obtient, d'autre part, la transformée sphérique de classe 1 et la mesure de Plancherel qui lui est associée.

La relative simplicité des résultats de Takahashi est due au fait que l'espace quotient de groupe par le sous-groupe compact maximal d'une décomposition de Cartan est, pour tous les groupes de Lorentz généralisés, de rang 1. Cette propriété lui permet de prouver facilement que toutes les algèbres $L(\delta)$ sont commutatives, donc que toutes les fonctions sphériques définissent des homomorphismes de $L(\delta)$ dans $\mathbb{C}$. Il nous a paru intéressant de voir dans quelle mesure ces propriétés subsistaient dans le cas des groupes pseudo-orthogonaux, sous-groupes de Lie de $GL(n+m, \mathbb{R})$ dont les éléments laissent invariant la forme quadratique indéfinie - $\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2$.

Il est facile de voir que, dans ce cas, si G est un tel groupe et K le sous-groupe compact associé à une décomposition d'Iwasawa de G , l'espace quotient G/K est de rang ≥ 1 . Cette complication implique alors que la presque totalité des algèbres $L(\delta)$ ne sont plus commutatives. De plus, même dans le cas particulier où δ est la représentation triviale du groupe compact K , les fonctions sphériques sont des fonctions à n variables qui ne sont pas encore étudiées. Notons en passant que ce sont les fonctions sphériques zonales au sens de Gelfand.

Il nous a donc paru intéressant de calculer ces fonctions en leur donnant une forme suffisamment explicite pour permettre d'en faire ultérieurement une étude détaillée.

Suivant la méthode utilisée par Takahashi, nous avons construit une série de représentations induites, dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable, définie sur le groupe compact K . Ces représentations nous ont permis, d'une part, de montrer que les fonctions sphériques que nous avons construites étaient de type positif et, d'autre part, d'obtenir, par factorisation de l'espace, un ensemble de représentations unitaires irréductibles.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555015_0014

Finalement nous donnons la mesure de Plancherel pour les fonctions sphériques au sens de Gelfand; ce qui donne essentiellement la décomposition de la représentation régulière définie par les translations dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable définie sur l'espace quotient G/K .

Nous osons espérer, en terminant cette introduction, que la forme que nous avons obtenue pour les fonctions sphériques des groupes pseudo-orthogonaux permettra d'obtenir ultérieurement l'analogue de la formule de Paley-Wiener pour les transformées sphériques de classe 1.

Qu'il me soit permis d'exprimer maintenant à M. W. Sörensen ma profonde reconnaissance pour tous les conseils judicieux qu'il n'a cessé de me prodiguer, dans un esprit empreint de cordialité et de compréhension, tout au cours de ce travail. Je tiens à remercier également MM. R. Bader et J.-P. Amiet avec lesquels j'ai eu de très profitables discussions.

TABLE DES MATIERES

	<u>Page</u>
§ 1. Quelques caractéristiques du groupe $O(n,m)$	1
§ 2. Algèbres de Lie de $O(n,m)$	3
§ 3. Quelques propriétés des algèbres de Lie semi-simple	5
§ 4. Décomposition d'Iwasawa de $(SO(n,m))_e$	14
§ 5. Mesure de Haar sur un groupe de Lie semi-simple	23
§ 6. Mesure de Haar sur $(SO(n,m))_e$	26
§ 7. Quelques sous-groupes fermés de $(SO(n,m))_e$	32
§ 8. Les représentations irréductibles de dimension finie de Γ'	43
§ 9. Représentations et algèbres $L(\delta)$	43
§ 10. Les fonctions sphériques	51
§ 11. Détermination de $\phi_1^\alpha(g)$ dans le cas de $(SO(n,m))_e$	55
§ 12. Fonctions sphériques de type positif et représentations	64
§ 13. Mesure de Plancherel	66
§ 14. Représentations de classe 1	70

§ 1 QUELQUES CARACTERISTIQUES DU GROUPE $O(n,m)$.

Définition. Soient n, m deux entiers tels que $m > n > 1$; on appelle groupe pseudo-orthogonal $O(n,m)$ le groupe des transformations linéaires réelles, associées à la forme quadratique indéfinie

$$(1;1) \quad - \sum_{i=1}^n (X^i)^2 + \sum_{i=n+1}^{m+n} (X^i)^2 \quad X^i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \dots, m+n.$$

En d'autres termes, $O(n,m)$ est le groupe des matrices réelles non singulières Λ d'ordre $m+n$ telles que :

$$(1;2) \quad {}^t \Lambda g \Lambda = g$$

où g désigne la matrice de coefficients $g_{i,j} = -\delta_{i,j}$ si $i \leq n$

et $g_{i,j} = \delta_{i,j}$ si $m+n \geq i > n$.

La relation (1;2) implique que $O(n,m)$ est un sous-groupe fermé du groupe $GL(n+m, \mathbb{R})$. En conséquence, $O(n,m)$ est un groupe de Lie dont la structure analytique est induite par celle de $GL(n+m, \mathbb{R})$.

Composante connexe de l'identité de $O(n,m)$.

Soient Ω_R (resp. Ω_T) les sous-matrices de Λ formées des n premières lignes et colonnes de Λ (respectivement des m dernières lignes et colonnes de Λ).

Soient d'autre part a_j^R $j=1, 2, \dots, n$ (resp. a_j^T $j=n+1, \dots, n+m$) les vecteurs colonnes de Ω_R (resp. Ω_T); alors,

$$(\det \Omega_T)^2 = \begin{vmatrix} (a_{n+1}^T, a_{n+1}^T), \dots, (a_{n+1}^T, a_{n+m}^T) \\ \vdots \\ (a_{n+m}^T, a_{n+1}^T), \dots, (a_{n+m}^T, a_{n+m}^T) \end{vmatrix}$$

$$\text{où } (a_i^T, a_j^T) = \sum_{k=n+1}^{m+n} \Lambda_i^k \Lambda_j^k$$

La relation (1;2) pouvant se mettre sous la forme

$$-\sum_{k=1}^n \Lambda_i^k \Lambda_s^k + \sum_{k=n+1}^{m+n} \Lambda_i^k \Lambda_s^k = \begin{matrix} -\delta_s^i & i \leq n \\ \delta_s^i & m+n \geq i > n \end{matrix}$$

on a que :

$$(\det \Omega_T)^2 = \begin{vmatrix} 1 + (\tilde{a}_{n+1}^R, \tilde{a}_{n+1}^R), & \dots & (\tilde{a}_{n+1}^R, \tilde{a}_{m+n}^R) \\ \vdots & & \vdots \\ (\tilde{a}_{m+n}^R, \tilde{a}_{n+1}^R), & \dots & 1 + (\tilde{a}_{m+n}^R, \tilde{a}_{m+n}^R) \end{vmatrix}$$

où

$$(\tilde{a}_i^R, \tilde{a}_j^R) = \sum_{k=1}^n \Lambda_i^k \Lambda_j^k$$

En conséquence,

$$(\det \Omega_T)^2 = 1 + \sum_{j=n+1}^{m+n} (\tilde{a}_j^R, \tilde{a}_j^R) + \sum_{\substack{j < k \\ j, k = n+1}}^{n+m} \begin{vmatrix} (\tilde{a}_j^R, \tilde{a}_j^R) & (\tilde{a}_j^R, \tilde{a}_k^R) \\ (\tilde{a}_k^R, \tilde{a}_j^R) & (\tilde{a}_k^R, \tilde{a}_k^R) \end{vmatrix} + \dots$$

Dans cette dernière expression tous les déterminants sont positifs ou nuls, comme déterminants de Gram; en conséquence $(\det \Omega_T)^2 \geq 1$.

Un raisonnement similaire montrerait que $(\det \Omega_R)^2 \geq 1$. Posant alors $\det \Omega_R = \Lambda_R$ et $\det \Omega_T = \Lambda_T$, nous pouvons définir les 4 sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned} I_1 &= \{ \Lambda : \Lambda_T \geq 1, \Lambda_R \geq 1, \Lambda \in O(n,m) \} \\ I_2 &= \{ \Lambda : \Lambda_T \leq -1, \Lambda_R \leq -1, \Lambda \in O(n,m) \} \\ I_3 &= \{ \Lambda : \Lambda_T \geq 1, \Lambda_R \leq -1, \Lambda \in O(n,m) \} \\ I_4 &= \{ \Lambda : \Lambda_T \leq -1, \Lambda_R \geq 1, \Lambda \in O(n,m) \} \end{aligned}$$

Il serait possible de démontrer encore (voir par exemple E. Cartan : Leçons sur la théorie des spineurs) que I_1 est la composante connexe de l'identité de $O(n,m)$, c'est-à-dire un sous-groupe invariant fermé de $O(n,m)$, pour lequel le groupe quotient $O(n,m)/I_1$ est totalement discontinu.

Soient

$$e = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

4 éléments de $O(n,m)$. Il est facile de voir que

$$e \in I_1 \quad a \in I_2 \quad b \in I_3 \quad \text{et} \quad c \in I_4.$$

De plus, le groupe (e,a,b,c) est isomorphe au groupe de Klein V_4 .

§ 2 ALGÈBRE DE LIE DE $O(n,m)$.

Comme nous l'avons déjà rappelé, $O(n,m)$ est un sous-groupe fermé de $GL(n+m, \mathbb{R})$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n,m)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de $GL(n+m, \mathbb{R})$. Ainsi la structure analytique de $O(n,m)$ est induite par celle de $GL(n+m, \mathbb{R})$.

Comme au voisinage de l'identité e , toute courbe à un paramètre est de la forme

$$S(t) = e + tX \quad \text{où} \quad S \in GL(n, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$$

l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est engendrée (en tant qu'espace vectoriel) par les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Crochet de Lie : Soient $t \mapsto e^{tX}$, $s \mapsto e^{sY}$ 2 courbes de $GL(n, \mathbb{R})$ paramétrées par s et t ; x, y appartenant à $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Alors, par définition du crochet de Lie,

$$[X, Y] = \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} e^{tX} e^{sY} (e^{tX})^{-1} (e^{sY})^{-1} \Big|_{t=s=0} = XY - YX$$

L'exponentielle permet donc d'associer à tout élément x de $\mathfrak{gl}(n+m, \mathbb{R})$ (respectivement de $\mathfrak{so}(n,m)$) un sous-groupe à un paramètre de $GL(n+m, \mathbb{R})$ (respectivement de $O(n,m)$). La relation (1;2) impose de plus aux éléments de $O(n,m)$ de satisfaire l'équation

$$e^{s^t X} g e^{sX} = g$$

ce qui, par dérivation (en $s=0$), donne

$$(2;1) \quad {}^t X g + g X = 0$$

Inversément, si x satisfait l'équation (2;1), nous avons :

$$e^{s^t x} ({}^t x g + g x) e^{sx} = 0$$

où e^{sx} est un sous-groupe à un paramètre de $GL(n+m, R)$.

Comme $e^{sx}|_{s=0} = e$ on voit que, par intégration, $e^{sx} \in SO(n, m)$, donc que $x \in so(n, m)$. Nous avons par conséquent la proposition suivante :

Proposition

Tout élément de $gl(n, R)$ qui satisfait la relation (2;1) est un élément de $so(n, m)$.

Base de $so(n, m)$: Soit $\Omega \in so(n, m)$ ($\sum_i (\Omega^i_j g_{jk} + g_{ij} \Omega^k_j) = 0$)

Posant $\Omega_{i,k} = \sum_j g_{ij} \Omega^j_k$ nous obtenons la condition

$$(2;2) \quad \Omega \in so(n, m) \text{ équivale à } \Omega_{i,k} + \Omega_{k,i} = 0 \quad \forall i, k = 1, 2, \dots, n+m.$$

Soit $\epsilon_{i,k}$ $i, k = 1, 2, \dots, n+m$, une base contravariante de $gl(n+m, R)$ définie par

$$(\epsilon_{i,k})^{\alpha, \beta} = \delta_i^\alpha \delta_k^\beta$$

Ω , comme élément de $gl(n+m, R)$, se met sous la forme

$$\Omega = \sum_{i,k} \Omega_{i,k} \epsilon_{i,k} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Omega_{i,k} (\epsilon_{i,k} - \epsilon_{k,i})$$

(La dernière égalité étant obtenue à l'aide de la relation (2;2)).

Ainsi la base de $so(n, m)$ est formée des vecteurs $e_{i,k} = \epsilon_{i,k} - \epsilon_{k,i}$ $i < k$.

En composantes mixtes, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} (e_{i,k})^\alpha_\rho &= \sum_r (e_{i,k})^{\alpha, r} g_{r, \rho} = \sum_r (\delta_i^\alpha \delta_k^r - \delta_i^r \delta_k^\alpha) g_{r, \rho} \\ (2;3) \quad &= \delta_i^\alpha g_{k, \rho} - \delta_k^\alpha g_{i, \rho} \end{aligned}$$

On montre alors facilement que,

$$(2;4) \quad [e_{i,j}, e_{k,l}] = g_{i,k} e_{j,l} - g_{j,l} e_{i,k} - g_{i,l} e_{j,k} + g_{j,k} e_{i,l}$$

Forme de Killing de $so(n,m)$.

Rappelons que la forme de Killing, que nous noterons $(\ , \)$, est définie par $(x, y) = \text{Tr} (\text{adx} \text{ady})$, où $y, x \in so(n,m)$.

Soient $x = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A^{i,j} e_{i,j}$ et $y = \frac{1}{2} \sum_{i,j} B^{i,j} e_{i,j}$ 2 éléments quelconques de $so(n,m)$.

$$(x, y) = \sum_{i,j,k,l} (\text{adx})_{k,l}^{i,j} (\text{ady})_{i,j}^{k,l}$$

$$\text{Mais, } [x, e_{k,l}] = \sum_{s,t} (\text{adx})_{k,l}^{s,t} e_{s,t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A^{i,j} (g_{j,k} e_{i,l} -$$

$$g_{j,l} e_{i,k} - g_{i,k} e_{j,l} + g_{i,l} e_{j,k}) = \sum_{i,j} A^{i,j} (g_{j,k} e_{i,l} + g_{i,l} e_{j,k})$$

Utilisant alors une formule similaire pour $[y, e_{k,l}]$ nous obtenons que :

$$\begin{aligned} [y, [x, e_{k,l}]] &= \sum_{p,q,s,t} (\text{adx})_{k,l}^{s,t} (\text{ady})_{s,t}^{p,q} e_{p,q} = \sum_{s,t} g_{k,k} g_{l,l} A^{t,k} B^{s,t} e_{s,l} \\ &+ \sum_{i,t} g_{k,k} g_{l,l} A^{i,k} B^{l,t} e_{t,i} + \sum_{p,q} g_{l,l} g_{k,k} A^{l,t} B^{s,t} e_{s,k} \\ &+ \sum_{l,i} g_{l,l} g_{k,k} A^{l,i} B^{k,t} e_{t,i} \end{aligned}$$

d'où, en regroupant les termes, nous obtenons :

$$(2;5) \quad (x, y) = -2(m+n-2) \sum_{l,k} g_{l,l} g_{k,k} A^{l,k} B^{l,k}$$

Cette relation nous montre que la forme de Killing est non dégénérée, donc que $so(n,m)$ est semi-simple.

§ 3 QUELQUES PROPRIETES DES ALGEBRES DE LIE SEMI-SIMPLES.

Complexification d'une algèbre de Lie réelle.

Soient V , un espace vectoriel sur R , et V' , un espace vectoriel sur C , tel que V soit isomorphe à un sous-espace de V' , considéré comme espace vectoriel sur R . Si, de plus, $\dim V' (\text{sur } C) = \dim V$, on dira que V' est le complexifié de

Un procédé canonique consiste à construire V' comme combinaisons linéaires formelles du type

$$\sum_i a_i x_i \quad \text{où} \quad x_i \in V \quad \text{et} \quad a_i \in \mathbb{C}$$

Cette construction équivaut à considérer V et $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et à former leur produit tensoriel

$$V' = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

On démontre alors que* :

Si g_0 est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$, et si g est l'espace vectoriel complexifié de g_0 , il existe une et une seule structure d'algèbre de Lie qui prolonge celle de g_0 . D'autre part, le complexifié d'une sous-algèbre ou d'un idéal de g_0 est une sous-algèbre, respectivement un idéal de g .

Sous-algèbre de Cartan

Définition.— Une sous-algèbre h d'une algèbre de Lie g , (sur un corps quelconque) est dite de Cartan si elle vérifie les conditions suivantes :

1. h est nilpotente.
2. h est son propre normalisateur.

(Rappelons qu'on appelle normalisateur d'un sous-ensemble a de g l'ensemble $n(a)$ des $x \in g$ tels que $\text{adx}.a \subset a$.)

* (Voir par exemple : J. Dixmier Algèbre de Lie C.D.U.)

Remarque. On démontre* que si g est semi-simple et définie sur un corps algébriquement clos et de caractéristique zéro, h est une sous-algèbre de Cartan si et seulement si 1) adx est diagonalisable pour tous les $x \in h$, 2) h est un élément maximal de l'ensemble des sous-algèbres abéliennes jouissant de la propriété 1).

Cette remarque, jointe au fait que h est son propre normalisateur, montre de plus, que toute sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre abélienne maximale de g .

Racines d'une algèbre de Lie semi-simple.

Soient g_0 , une algèbre de Lie semi-simple sur R , g sa complexifiée, et h , une sous-algèbre de Cartan de g . Par la remarque ci-dessus, nous voyons que la représentation adjointe de g , restreinte aux éléments de h , est formée d'éléments simultanément diagonalisables. Il est donc possible de chercher les sous-espaces stables de g relativement à cette représentation de h . Plus précisément, soit $\alpha(H)$, une forme linéaire sur h . Considérons l'ensemble g^α des vecteurs $x \in g$ tels que,

$$\text{ad}H.x = \alpha(H) x \quad \forall H \in h$$

Si la forme α est telle que g^α soit différent de $\{0\}$, g^α est un sous-espace propre de g , relativement à cette représentation de h .

Définition.— On appelle racine de g , relativement à h , les formes linéaires sur h , non nulles, qui donnent lieu à des sous-espaces propres de g (pour la représentation adjointe).

* (Voir par exemple : J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simple complexes, Benjamin.)

Soit Δ l'ensemble des racines de g ; alors, par une décomposition classique, g est somme directe des espaces suivants :

$$g = g^{\alpha_0} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} g^{\alpha} \quad \text{où } \alpha_0 \text{ est la forme linéaire nulle.}$$

Remarquons que si $x, y \in g^{\alpha_0}$, alors, par l'identité de Jacobi, $[x, y] \in g^{\alpha_0}$. Ainsi g^{α_0} est une sous-algèbre, laquelle contient manifestement h . Il est en fait possible de montrer que $h = g^{\alpha_0}$ et que $\dim g^{\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \Delta$.

Proposition (3;1)

Soient g_0 , une algèbre de Lie semi-simple sur R , g sa complexifiée, h une sous-algèbre de Cartan de g . Alors :

1. $g = h + \sum_{\alpha \in \Delta} g^{\alpha}$ et $\dim g^{\alpha} = 1$.
2. g^{α} et g^{β} sont orthogonaux par rapport à la forme de Killing lorsque $\alpha + \beta \neq 0 \quad \alpha, \beta \in \Delta$. De plus, la forme de Killing est non dégénérée sur h .
3. Si α est racine, $-\alpha$ est racine.
4. On peut choisir des vecteurs $X_{\alpha} \in g^{\alpha} \quad (\alpha \in \Delta)$ de manière à avoir :

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = 0 \text{ si } \alpha + \beta \neq 0 \text{ et } \alpha + \beta \notin \Delta \quad (X_{\alpha} \in g^{\alpha}, X_{\beta} \in g^{\beta})$$

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta} \text{ si } \alpha + \beta \in \Delta$$

$$[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = H_{\alpha} \text{ où } H_{\alpha} \text{ est l'unique élément de } h \text{ défini par}$$

$$(H, H_{\alpha}) = \alpha(H) \quad \forall H \in h$$

$$N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta} \text{ est réel}$$

$$\alpha(H) \text{ est réel positif } \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

Dém. 1. Résulte des remarques faites ci-dessus.

2. Soient $X_{\alpha} \in g^{\alpha}$, $X_{\beta} \in g^{\beta}$ et $H \in h$ tel que $(\alpha + \beta)(H) \neq 0$ alors $([H, X_{\alpha}], X_{\beta}) = -(H_{\alpha}, [H, X_{\beta}])$ d'où $(\alpha + \beta)(H)(X_{\alpha}, X_{\beta}) = 0$. Remplaçant X_{α} par $H' \in h$, on obtient, de façon similaire, que h est orthogonal aux g^{α} .

Ainsi la non dégénérescence de la forme de Killing sur g impose, d'une part l'existence de $g^{-\alpha}$, donc de la racine $-\alpha$ d'autre part la non dégénérescence de la forme de Killing sur h .

3. Est démontré dans 2.

4. $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}$ résulte de l'identité de Jacobi appliquée à $[H, [X_\alpha, X_\beta]]$

Soient $X \in g^\alpha$, $Y \in g^{-\alpha}$; alors $(H, [X, Y]) = \alpha(H) (X, Y)$

$= (H, H_\alpha (X, Y)) \quad \forall H \in h$ d'où $[X, Y] = H_\alpha (X, Y)$

et comme la forme de Killing met g^α et $g^{-\alpha}$ en dualité, il existe un Y tel que $(X, Y) = 1$.

Supposons maintenant $\alpha(H_\alpha) = 0$ et choisissons X_α et $X_{-\alpha}$ comme ci-dessus.

Ces éléments engendrent une sous-algèbre a de g .

Nous avons : $[H_\alpha, X_\alpha] = 0$, $[H_\alpha, X_{-\alpha}] = 0$, $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H$.

C'est une algèbre résoluble (même nilpotente) sur un corps algébriquement clos et de caractéristique zéro. En vertu du théorème de Lie, la représentation adjointe de g est, par restriction à a , une représentation de a , représentation qui peut se mettre sous forme triangulaire. Comme $H_\alpha \in Da$, H_α est représenté par une matrice strictement triangulaire. Ainsi, $\text{ad}H_\alpha$ est nilpotent; mais $\text{ad}H_\alpha$ est semi-simple, car $H_\alpha \in h$. D'où une contradiction.

$N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$ provient d'une étude de l'algèbre a et des racines*.

Formes réelles de g .

Lemme (3;2)

Avec les mêmes notations que dans la proposition ci-dessus, nous avons :

1. Les racines de g , relativement à h , engendrent l'espace h^* , dual de h

2. $h = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C} H_\alpha$

3. Si $\tilde{h} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} H_\alpha$ alors la forme de Killing est positive définie sur $\tilde{h} \times \tilde{h}$.

* (Voir Séminaire S. Lie)

Dém. 1. Soit r le nombre de racines linéairement indépendantes de h^* .

Alors, si $r < \dim h^*$, il existe $x \neq 0$ ($x \in h$) tel que $\alpha(x) = 0$
 $\forall \alpha \in \Delta$. En conséquence, $[x, Y_\beta] = \alpha(x) Y_\beta \quad \forall Y_\beta \in g$ et $\forall \beta \in \Delta$.

De ce fait, x appartient au centre de g ; mais g étant semi-simple $x = 0$. On a donc une contradiction.

2. Supposons que $\sum_{\alpha \in \Delta} C H_\alpha \subset h$ strictement. Alors, il existe $\lambda \in h^*$, non nul, tel que $\lambda(H_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$. Soit alors H_λ défini par $\lambda(H) = (H, H_\lambda) \quad \forall H \in h$. Nous avons alors $(H_\alpha, H_\lambda) = \alpha(H_\lambda) = 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$, d'où, par 1. $H_\lambda = 0$ et $\lambda = 0$.

3. Provient d'une étude détaillée des racines.

Définitions.-

1. Soit g une algèbre de Lie sur C . Une sous-algèbre de Lie réelle g_0 de g (considérée comme algèbre sur R) est dite une forme réelle de g , si l'application canonique de la complexifiée $g_0 \otimes_R C$ de g_0 dans g est un isomorphisme, autrement dit, si $\dim_R g_0 = \dim_C g$.
2. On appelle conjugaison de g , par rapport à g_0 , un semi-automorphisme involutif de g , laissant les éléments de g_0 invariants.
3. Une forme réelle dont la forme de Killing est négative, est dite compacte.

Théorème (3;3)

Toute algèbre de Lie semi-simple sur C possède une forme réelle compacte.

Dém. Choisissons une base de g formée de,

- 1) Les $X_\alpha \in g^\alpha$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$
- 2) Une base orthonormée $H_1, H_2, \dots, H_l$ de $\tilde{h}$ et leur correspondant imaginaire, $iH_1, iH_2, \dots, iH_l$.

Faisant usage du lemme 3;2 et de la proposition 3;1 on montre facilement que,

$$g_k = \sum_{i=1}^l R \sqrt{-1} H_i + \sum_{\alpha \in \Delta} R (X_\alpha - X_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta} R \sqrt{-1} (X_\alpha + X_{-\alpha})$$

est une forme réelle compacte de g .

Décomposition de Cartan-Mostow-Iwasawa.

Définition.-

Soient g_0 une algèbre de Lie semi-simple sur R , g sa complexifiée, σ la conjugaison de g relativement à g_0 . Une décomposition directe de g_0 en

$$g_0 = k_0 + p_0,$$

où k_0 est une sous-algèbre de g_0 et p_0 un sous-espace vectoriel de g_0 , est dite de Cartan, s'il existe une forme réelle compacte g_k de g , telle que :

$$\sigma g_k \subset g_k \quad k_0 = g_0 \cap g_k \text{ et } p_0 = g_0 \cap \sqrt{-1} g_k$$

Remarque : Il est possible de montrer que toute algèbre de Lie semi-simple complexe possède une décomposition de Cartan.

Proposition (3;4)

Soit $g_0 = k_0 + p_0$ une décomposition de Cartan; alors $(x, x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \in k_0$ et $(y, y) > 0 \quad \forall y \neq 0 \in p_0$, et inversement.

De plus l'application $\theta : x+y \rightarrow x-y$ est un automorphisme de g_0 .

Dém. Si g_0 est une décomposition de Cartan, l'assertion est une conséquence immédiate de la définition. Inversement, comme θ est un automorphisme, il laisse invariant la forme de Killing. Soit alors $x \in k_0$ et $y \in p_0$. Nous avons :

$$(x, y) = (\theta x, \theta y) = -(x, y) = 0$$

De plus, $[k_0, p_0] \subset p_0$ et $[p_0, p_0] \subset k_0$. Ainsi, si l'on définit g_k par $g_k = k_0 + \sqrt{-1} p_0$, g_k est une forme compacte de g .

Soient σ et τ , les conjugaisons de g par rapport à g_0 et g_k respectivement. Alors $\theta = \sigma \tau$ est un automorphisme involutif de g . (σ et τ permutent).

Soient d'autre part h_{p_0} une sous-algèbre abélienne maximale de p_0 .

Étendons h_{p_0} à une sous-algèbre abélienne maximale h_0 de g_0 . Alors, si $x \in h_0$ et $y \in h_{p_0}$, on a que, $[\theta x, y] = -[\theta x, \theta y] = -\theta[x, y] = 0$.

Mais p_0 est tel que $\theta z = z \forall z \in p_0$, d'où $x - \theta x \in p_0$. De plus, $[x - \theta x, y] = 0 \forall y \in h_{p_0}$. Ainsi, $x - \theta x \in h_{p_0}$ et $\theta h_0 = h_0$.

Par une décomposition habituelle nous avons alors, $h_0 = h_{k_0} + h_{p_0}$, avec $h_{k_0} = h_0 \cap k_0$.

Désignons par h, h_p, h_k, k, p , les sous-espaces de g engendrés par $h_0, h_{p_0}, h_{k_0}, k_0, p_0$, respectivement.

Lemme (3;5)

h est une sous-algèbre de Cartan de g .

Dém. h est une sous-algèbre abélienne maximale de g ; montrons que $\text{ad} H$ est diagonalisable $\forall H \in h$. Soit sur g $x \in g$, une forme hermitienne positive définie, définie par

$$B(x, y) = -(x, \tau y)$$

Soit $z \in g_k$; alors $B(\text{adz}.x, y) + B(x, \text{adz}.y) = 0 \quad \forall x \text{ et } y \in g$.

Ainsi adz est antihermitien, donc diagonalisable.

Si $H \in h$ est tel que $H = H_1 + H_2$, où $H_1 \in h_k$ et $H_2 \in h_p$, nous avons que $[\text{ad} H_1, \text{ad} H_2] = \text{ad}[H_1, H_2] = 0$, d'où $\text{ad}(H_1 + H_2)$ est diagonalisable.

Ordre lexicographique sur l'ensemble des racines.

Soit $\tilde{h} = \sum_{\alpha \in \Delta} R H_\alpha$; comme les racines de g , appliquées aux éléments de $\tilde{h}$, sont à valeurs dans R , il est possible de définir un ordre sur l'ensemble des racines. Soit, en effet, $H_1, \dots, H_n$ une base de h , dont les q premiers éléments forment une base de h_{p_0} .

Soient alors ρ et μ , deux formes linéaires sur h . Nous dirons que $\rho > \mu$ si dans la suite $((\rho - \mu)(H_i)) \quad i = 1, 2, \dots, n$, le premier terme non nul est positif. L'ordre ainsi défini est de plus compatible avec l'ordre sur h_{p_0} , puisque toute forme positive sur h , est positive ou nulle sur h_{p_0} .

Associons maintenant à λ la forme linéaire $\theta\lambda$ définie par

$$\theta\lambda(h) = \lambda(\theta h) \quad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

On démontre alors que, si $\lambda \in \Delta$, $\theta\lambda \in \Delta$. Soit, d'autre part,

$P_+ = \{\alpha : \alpha \in \Delta, \alpha > 0 \text{ et } \alpha \neq \theta\alpha\}$. Une étude détaillée des racines montre que le sous-espace $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^\alpha$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$.

On a de plus le théorème suivant :

Théorème (3;6)

Soit $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{n}_0$. Alors, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_0$ sont nilpotentes, $\mathfrak{s}_0$ est résoluble et

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{n}_0 \quad \text{est une somme directe.}$$

Une telle décomposition est dite décomposition d'Iwasawa.

Par exponentiation des éléments des algèbres de Lie $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ et $\mathfrak{n}_0$, il est possible de trouver l'équivalent global de ce théorème. Son énoncé est alors le suivant :

Théorème (3;7)

Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{n}_0$ une décomposition d'Iwasawa d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}_0$ sur $\mathbb{R}$. Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. Soient K , $A_{\mathfrak{p}}$, N , les sous-groupes analytiques de G d'algèbres de Lie $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, $\mathfrak{n}_0$ respectivement.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : (k, a, n) &\longmapsto kan \\ K \times A_{\mathfrak{p}} \times N &\longrightarrow G \end{aligned}$$

est un difféomorphisme analytique. De plus $A_{\mathfrak{p}}$ et N sont simplement connexes.

* (Voir par exemple : K. Iwasawa, Annals of Math. Vol. 50 No 3 p. 525 ou Séminaire S. Lie, exposé 11, ou S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, p. 222)

Nous désignerons dans ce qui suit par $(SO(n,m))e$, la composante connexe de l'identité de $O(n,m)$.

§ 4 DECOMPOSITION DE IWASAWA DE $(SO(n,m))e$.

Soient k_0 et p_0 les sous-ensembles de $so(n,m)$ engendrés respectivement par les $e_{i,j}$, pour $1 \leq i < j \leq n$, $n < i < j \leq m+n$ et par les $e_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$, $n < j \leq m+n$. Les éléments de k_0 sont donc engendrés par des matrices antisymétriques, alors que ceux de p_0 sont engendrés par des matrices symétriques. Ainsi, $so(n,m)$ est une somme directe de p_0 et k_0 .

Comme la forme de Killing (2;5) est négative définie sur k_0 et positive définie sur p_0 et que, d'autre part, la relation (2;4) implique que $[p_0, p_0] \subset k_0$, $[k_0, k_0] \subset k_0$ et $[p_0, k_0] \subset p_0$, nous sommes dans les conditions d'application de la proposition (3;4). Par conséquent, $k_0 + p_0$ est une décomposition de Cartan de $so(n,m)$.

Sous-algèbre de Cartan de $so(n,m)$.

Soit h_{p_0} la sous-algèbre (abélienne) engendrée par les éléments $e_{1,n+1}$, $e_{2,n+2}, \dots, e_{n,2n}$.

Soit h_{k_0} , le sous-espace engendré par les éléments $e_{2n+1,2n+2}$, $e_{2n+3,2n+4}$, $\dots, e_{\ell-1,\ell}$, avec $\ell = m-n$, si $m-n$ est pair, et $\ell = m-n-1$, si $m-n$ est impair.

Théorème (4;1)

L'algèbre engendrée par h_{p_0} et h_{k_0} est une sous-algèbre de Cartan h_0 de $so(n,m)$.

Dém. Comme les éléments générateurs permutent entre eux, h_0 est abélienne, donc nilpotente. Montrons qu'elle est égale à son normalisateur, c'est-à-dire que si $x \in so(n,m)$ est tel que $[x, a] \in h_0 \quad \forall a \in h_0$, alors $x \in h_0$.

Soit $x = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A^{i,j} e_{i,j}$, où $A^{i,j} \in \mathbb{R} \quad \forall i,j$.

Par la relation (4;2) nous avons :

$$\begin{aligned}
 [X, e_{k,k+s}] &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m+n} A^{i,j} [e_{i,j}, e_{k,k+s}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m+n} A^{i,j} (g_{j,k} e_{i,k+s} \\
 &- g_{i,k} e_{j,k+s} - g_{j,k} e_{i,k} + g_{i,k+s} e_{j,k}) = \sum_{i,j=1}^{m+n} (A^{i,j} g_{j,k} e_{i,k+s} \\
 &+ A^{i,j} g_{i,k+s} e_{j,k}) \in h_0 \quad \forall e_{k,k+s} \in h_0 \quad (s=1 \text{ ou } n).
 \end{aligned}$$

Comme $i \neq j$ et $s \neq 0$, nous avons que tous les vecteurs $e_{i,k+s}$ et $e_{j,k}$, pour lesquels $i \neq k$ et $j \neq k+s$, sont linéairement indépendants.

Mais, $\forall i \neq k$ et $\forall j \neq k+s$, les vecteurs $e_{i,k+s}$ et $e_{j,k} \notin h_0$ d'où.

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m+n} A^{i,j} g_{j,k} &= 0 \quad \forall \substack{i,k \\ i \neq k+s} = 1, 2, \dots, n \quad \text{et } k = 2n+1, 2n+3, \dots, l-1 \\
 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+n} A^{i,j} g_{i,k+s} &= 0 \quad \forall \substack{j,k \\ j \neq k, (s=n)} = 1, 2, \dots, n \quad \text{et } k = 2n+1, 2n+3, \dots, l \\
 &\quad (s=1)
 \end{aligned}$$

Ainsi, si $m-n$ est pair, $A^{i,k} = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, m+n$, et $k = 1, 2, \dots, m+n$ (si $m-n$ est impair, $k = 1, 2, \dots, n+m-1$). Donc seuls les éléments $A^{k,k+s}$ sont différents de zéro; d'où $x \in h_0$.

Soit $(\mathfrak{so}(n,m))_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{so}(n,m)$ et soit h le sous-espace de $(\mathfrak{so}(n,m))_{\mathbb{C}}$ engendré par h_0 . Alors h est une sous-algèbre de Cartan de $(\mathfrak{so}(n,m))_{\mathbb{C}}$.

Racines de $(\mathfrak{so}(n,m))_{\mathbb{C}}$ relativement à h .

D'après la définition des racines (voir § 3), le problème revient à chercher des formes linéaires non nulles sur h , pour lesquelles les solutions de l'équation

$$(\text{ad } H - \alpha(H)) X = 0 \quad \forall H \in h \text{ ne soient pas triviales.}$$

$$\text{Soit } X = \frac{1}{2} \sum A^{i,j} e_{i,j} \quad \text{où } A^{i,j} \in \mathbb{C} \quad \forall i,j = 1, 2, \dots, m+n.$$

Pour que X soit un élément radiciel il faut donc que :

$$[e_{k,k+s}, X] = \alpha(e_{k,k+s}) X \quad \forall e_{k,k+s} \in h_0$$

Faisant usage de (4;2), nous avons alors que :

$$\begin{aligned} [e_{k,k+s}, X] &= \sum_{i,j=1}^{m+n} A^{i,j} (g_{j,k} e_{i,k+s} + g_{i,k+s} e_{j,k}) \\ &= \alpha(e_{k,k+s}) \sum_{i,j=1}^{m+n} A^{i,j} e_{i,j} \end{aligned}$$

Comme nous savons déjà que les éléments de h sont des vecteurs propres de la forme linéaire $\alpha = 0$, nous posons $A^{k,k+s} = 0$ pour toutes les paires d'indices $(k, k+s)$ correspondant à des éléments de h . Notre recherche se limite ainsi aux racines de $(so(n,m))_{\mathbb{C}}$ seulement.

Les éléments restants étant linéairement indépendants, nous avons :

$$\begin{aligned} (4;3) \quad g_{k,k} A^{k,i} &= \alpha(e_{k,k+s}) A^{i,k+s} \\ g_{k+s,k+s} A^{i,k+s} &= \alpha(e_{k,k+s}) A^{i,k} \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, m+n.$$

d'où, $g_{k+s,k+s} g_{k,k} = -\alpha^2(e_{k,k+s})$ et de ce fait,

$$(4;4) \quad \alpha_{k,k+s} \equiv \alpha(e_{k,k+s}) = \pm (-g_{k,k} g_{k+s,k+s})^{1/2}$$

Par conséquent, pour k et $k+s$ fixés, nous avons que

$$(4;5) \quad X = \sum_{j,k=1}^{m+n} A^{j,k} e_{j,k} + \sum_{j',k+s=1}^{m+n} A^{j',k+s} e_{j',k+s}$$

Soit alors $e_{k',k'+s}$ un autre élément de h_0 . Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \alpha_{k',k'+s} &= \pm (-g_{k',k'} g_{k'+s,k'+s})^{1/2} \text{ et} \\ X &= \sum_{q,k=1}^{m+n} A^{q,k} e_{q,k} + \sum_{q',k'=1}^{m+n} A^{q',k'+s} e_{q',k'+s} \end{aligned}$$

Pour que les solutions relatives à ces deux éléments de h_0 soient compatibles, il faut donc que :

$$\sum_{j,k} A^{j,k} e_{j,k} + \sum_{j',k+s} A^{j',k+s} e_{j',k+s} = \sum_{q,k} A^{q,k} e_{q,k} + \sum_{q',k'+s} A^{q',k'+s} e_{q',k'+s}.$$

Les seules composantes non nulles sont donc, dans le cas où $m-n$ est pair, $A^{k,k}$, $A^{k',k+s}$, $A^{k'+s,k'+s}$ et $A^{k'+s,k}$. Dans le cas où $m-n$ est impair, il faut y ajouter $A^{m+n,k}$ et $A^{m+n,k+s}$ (provient directement de (4;5)).

Tenant maintenant compte des relations (4;4) nous pouvons écrire :

$$A^{k,k'} = \alpha_{k,k+s} A^{k',k+s} \quad g_{k,k} = -\alpha_{k',k'+s} A^{k,k'+s} g_{k',k'}$$

$$A^{k,k'+s} = \alpha_{k,k+s} A^{k'+s,k'+s} \quad g_{k,k'} \quad \text{d'où les éléments radiciels sont}$$

de la forme suivante :

1) Si $m-n$ est pair.

$$(4;6) \quad X = A^{k,k'} \left\{ e_{k',k} - \frac{g_{k',k'}}{\alpha_{k',k'+s}} e_{k'+s,k} - \frac{g_{k,k}}{\alpha_{k,k+s}} e_{k',k'+s} + \frac{g_{k,k} g_{k',k'}}{\alpha_{k,k+s} \alpha_{k',k'+s}} e_{k'+s,k'+s} \right\}$$

2) Si $m-n$ est impair, il faut ajouter encore,

$$(4;7) \quad X = A^{m+n,k+s} \left\{ e_{k,m+n} - g_{k,k} \alpha_{k,k+s} e_{k+s,m+n} \right\}$$

qui s'obtient en remarquant que $A^{k,m+n} = g_{k,k} \alpha_{k,k+s} A^{m+n,k+s}$

Pour obtenir les racines correspondant à ces éléments radiciels, nous remarquons (2;4) que le crochet de X avec les générateurs de $\mathfrak{h}$, n'est différent de zéro que pour $e_{k,k+s}$ et $e_{k'+k'+s}$.

Ainsi α n'est différent de zéro que sur ces éléments.

Soient alors λ_i $i = 1, \dots, \ell$ des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ telles que

$$\lambda_i(e_{j,j+s}) = \delta_{i,j}.$$

Nous pouvons mettre à l'aide de ces formes linéaires, les racines sous la forme suivante :

1) Si $m-n$ est pair,

$$\pm \lambda_i \pm \lambda_j \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad 2n+1, \dots, \ell-1.$$

2) Si $m-n$ est impair, il faut ajouter encore aux racines de 1)

$$\pm \lambda_i \quad i=1, 2, \dots, \ell$$

Soit θ l'automorphisme défini dans la proposition (3;4) et

$P_+ = \{ \alpha : \alpha \in \Delta \quad \alpha > 0 \text{ et } \alpha \neq \theta \alpha \}$ alors comme $\theta \lambda_i(H) = \lambda_i(\theta H) = -\lambda_i(H)$
 $\forall H \in h_{p_0}$, on a que P_+ est formé des racines

$$(4;8) \quad \lambda_i \pm \lambda_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = i+1, \dots, n, 2n+1, \dots, 2n-1$$

dans le cas pair; auquel il faut ajouter λ_i $i = 1, \dots, n$ dans le cas impair.

A l'aide des relations (4;4), (4;6) et (4;7) on obtient les éléments radiciels correspondants. Soit, dans le cas pair,

$$X_{\lambda_i + \lambda_j} = e_{i,j} + e_{i,j+n} + e_{i+n,j+n} + e_{i+n,j}$$

$$\text{si } j \leq n \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

$$X_{\lambda_i - \lambda_j} = e_{i,j} - e_{i,j+n} + e_{i+n,j} - e_{i+n,j+n}$$

$$X_{\lambda_i + \lambda_j} = e_{i,j} + \sqrt{-1} e_{i,j+1} + \sqrt{-1} e_{i+n,j+n} + e_{i+n,j} \quad \text{si } j > n$$

$$X_{\lambda_i - \lambda_j} = e_{i,j} - \sqrt{-1} e_{i,j+1} - \sqrt{-1} e_{i+n,j+1} + e_{i+n,j} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

auxquels il faut ajouter, dans le cas impair,

$$X_{\lambda_i, m+n} = e_{i,m+n} + e_{i+n,m+n} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Soit n , la sous-algèbre engendrée par les éléments radiciels définis ci-dessus. Nous avons alors que : (voir (3;6)) n et $n_0 = \mathfrak{so}(n, m) \cap n$ sont respectivement des algèbres nilpotentes de $(\mathfrak{so}(n, m))_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{so}(n, m)$.

Posons $X_j^i = e_{i,j} + e_{i+s,j}$

$$s = 1 \quad \text{si } i \leq n$$

$$s = n \quad \text{si } i > n$$

Nous pouvons alors mettre les éléments radiciels sous la forme suivante :

$$X_{\lambda_i + \lambda_j} = X_j^i + X_{j+n}^i$$

$$\text{si } j \leq n \text{ et } i = 1, \dots, n$$

$$X_{\lambda_i - \lambda_j} = X_j^i - X_{j+n}^i$$

$$X_{\lambda_i + \lambda_j} = X_j^i + \sqrt{-1} X_{j+1}^i$$

$$\text{si } j > 2n \text{ et } i = 1, \dots, n$$

$$X_{\lambda_i - \lambda_j} = X_j^i - \sqrt{-1} X_{j+1}^i$$

auquel on ajoute, dans le cas impair seulement, X_{m+n}^i $i = 1, \dots, n$.
Ainsi on voit que les X_j^i , qui appartiennent à $\mathfrak{so}(n, m)$, forment une base de n_0 .

Décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{so}(n, m)$.

Comme $X_j^i = e_{i,j} + e_{i+s,j}$, on a que $(X_j^i)_{\beta}^{\alpha} = g_{j,\beta} (\delta_i^{\alpha} + \delta_{i+s}^{\alpha}) - \delta_j^{\alpha} (g_{i,s} + g_{i+s,\beta})$ et, de ce fait,

$$\begin{aligned} (4;9) \quad (X_j^i X_{j'}^{i'})_{\beta}^{\alpha} &= \sum_{\gamma=1}^{n+m} (g_{j,\gamma} (\delta_i^{\alpha} + \delta_{i+s}^{\alpha}) - \delta_j^{\alpha} (g_{i,\gamma} + g_{i+s,\gamma})) \\ &\quad (g_{j',\beta} (\delta_{i'}^{\gamma} + \delta_{i'+s}^{\gamma}) - \delta_{j'}^{\gamma} (g_{i',\beta} + g_{i'+s,\beta})) = \\ &= -g_{j,j'} (g_{i,\beta} + g_{i+s,\beta}) (\delta_i^{\alpha} + \delta_{i+s}^{\alpha}) + \text{des termes nuls.} \end{aligned}$$

(Contiennent soit $(g_{i,i} + g_{i+s,i+n})$, soit des $\delta_{i,j}$, dont les indices ne peuvent être les mêmes ($i < j$)).

De même, un calcul analogue montre que :

$$(4;10) \quad X_j^i X_j^i, X_j^i, = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des X_j^i , où i est fixe et $j > i$, engendre une sous-algèbre abélienne $(g_{j,j'} = g_{j',j})$ de n_0 ; nous la désignons par n_0^i . Par conséquent, $n_0 = \sum_{i=1}^n n_0^i$ et, par le théorème (3;10),

$$(4;11) \quad \mathfrak{so}(n, m) = k_0 + h_{p_0} + \sum_{i=1}^n n_0^i \quad \text{est une somme directe.}$$

Décomposition d'Iwasawa de la composante connexe de l'identité de $(SO(n,m))_e$.

1. Sous-groupe K d'algèbre de Lie k_0 .

$k_0 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} R e_{i,j} + \sum_{n < i < j \leq m+n} R e_{i,j}$. Ainsi, par la définition des $e_{i,j}$, les éléments de k_0 sont des matrices antisymétriques. Si nous posons de plus,

$$(4;12) \quad k_1 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} R e_{i,j} \quad \text{et} \quad k_2 = \sum_{n < i < j \leq m+n} R e_{i,j}$$

nous avons que :

$$1) \forall a \in k_1, \forall b \in k_2, [a, b] = 0$$

$$2) \forall a, b \in k_1, [a, b] \in k_1; \quad \text{avec des formules similaires pour } k_2.$$

Ainsi k_1 et k_2 sont deux idéaux permutables de k_0 . Il leur correspond donc deux sous-groupes analytiques de G , engendrés respectivement par k_1 et k_2 , dont le produit direct aura, à isomorphie près, k_0 pour algèbre de Lie.

Soient K_1 et K_2 les sous-groupes analytiques définis ci-dessus. Comme par la relation (1;3) $\det K_1 = \det K_2 = 1$, on a que :

$$K_1 = SO(n) \quad \text{et} \quad K_2 = SO(m). \quad \text{Enfin, } K = SO(n) \times SO(m).$$

2. Sous-groupe A_p d'algèbre de Lie h_{p_0} .

Soit A_p le sous-groupe analytique de $SO(n,m)$ d'algèbre de Lie h_{p_0} . Comme h_{p_0} est une sous-algèbre abélienne formée de matrices symétriques, l'élément général de A_p est de la forme,

$$\exp \left(\sum_{i=1}^n t_i e_{i,i+n} \right) = \prod_{i=1}^n \exp (t_i e_{i,i+n}). \quad \text{Un calcul montre alors que :}$$

$$(4;13) \quad \prod_{i=1}^n \exp (t_i e_{i,i+n}) =$$

$$\begin{bmatrix} \cosh t_1, 0, \dots, 0, \sinh t_1, 0, \dots, 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0, \cosh t_2, 0, \dots, 0, \sinh t_2, \dots, 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, \dots, \cosh t_n, 0, 0, \dots, \sinh t_n, 0, \dots, 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sinh t_1, 0, \dots, 0, \cosh t_1, 0, \dots, 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0, \sinh t_2, 0, \dots, 0, \cosh t_2, 0, \dots, 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, \dots, \sinh t_n, 0, \dots, \cosh t_n, 0, \dots, 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1, 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Sous-groupe N d'algèbre de Lie n_0 .

Lemme n_0^i est un idéal de $\sum_{s=i}^n n_0^s$ $i = 1, 2, \dots, n$

Dém. $[X_j^i, X_j^{i'}] = [e_{i,j}, e_{i',k}] + [e_{i,j}, e_{i'+n,k}]$
 $+ [e_{n+i,j}, e_{i,k}] + [e_{n+i,j}, e_{n+i',k}] = -g_{j,k}((e_{i,i'} + e_{n+i,i'})$
 $+ (e_{i,n+i'} + e_{n+i,n+i'}))$, où la dernière égalité est obtenue à l'aide de la relation (2;4).

Mais $e_{i,i'} + e_{n+i,i'} = X_{i'}^i$, et $(e_{i,n+i'} + e_{n+i,n+i'}) = X_{n+i'}^i$

D'où le résultat.

Soit N^i le sous-groupe analytique de $SO(n,m)$ engendré par n_0^i . Comme n_0^i est abélienne, l'exponentielle est une bijection et l'élément général de N^i a la forme

$$(4;14) \quad U^i = \exp \left(\sum_{j=i+1}^n \xi_j^i X_j^i + \sum_{j=n+i+1}^{m+n} \xi_j^i X_j^i \right)$$

$$\text{Posons } \Delta^i = \sum_{j,j'=i+1}^n g_{j,j'} \xi_j^i \xi_{j'}^i + \sum_{j,j'=n+i+1}^{m+n} g_{j,j'} \xi_j^i \xi_{j'}^i$$

$$= - \sum_{j=i+1}^n (\xi_j^i)^2 + \sum_{j=n+i+1}^{m+n} (\xi_j^i)^2$$

Tenant compte des relations (4;8) et (4;9), nous obtenons :

$$(U^i)_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \sum_{j=i+1}^n (g_{j,\beta} (\delta_j^{\alpha} + \delta_{i+n}^{\alpha}) - \delta_j^{\alpha} (g_{i+n,\beta} + g_{i,\beta})) \xi_j^i$$

$$+ \sum_{j=n+i+1}^{m+n} (g_{j,\beta} (\delta_j^{\alpha} + \delta_{i+1}^{\alpha}) - \delta_j^{\alpha} (g_{i+1,\beta} + g_{i,\beta})) \xi_j^i$$

$$- \frac{1}{2} \Delta^i (g_{i+n,\beta} + g_{i,\beta}) (\delta_i^{\alpha} + \delta_{n+i}^{\alpha}).$$

Théorème (4;15)

Soit N le sous-groupe analytique de $(SO(n,m))_0$ engendré par n_0 . Alors tout élément $x \in N$ peut se mettre sous la forme

$$x = u^1 u^2 \dots u^n \quad \text{où} \quad u^i \in N^i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Dém. On procède par induction sur le nombre n des u^i . Le théorème est vrai pour $n = 1$.

$$\text{Soit } x \in N \quad x = \exp \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i+1}^n \xi_j^i X_j^i \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=n+i+1}^{m+n} \xi_j^i X_j^i \right) \right)$$

Soit $u^n = \exp \left(\sum_{j=2n+1}^{n+m} \xi_j^n X_j^n \right)$ Alors, par la formule de Campbell-Hausdorff et le lemme ci-dessus, nous avons que :

$$x (u^n)^{-1} = \exp \left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n-1} \xi_j^i X_j^i \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=n+i+1}^{m+n} \xi_j^i X_j^i \right) \right) \text{ modulo } \sum_{j=2n+1}^{n+m} \xi_j^n X_j^n \right)$$

$= u^1 u^2 \dots u^{n-1}$ par hypothèse d'induction. D'où le résultat. Par le théorème 3;7 nous avons maintenant le résultat suivant :

Théorème (4;16)

L'application $\phi : (k_1, k_2, a, u^1, u^2, \dots, u^n) \mapsto k_1 k_2 a, u^1 u^2 \dots u^n$ est un difféomorphisme analytique de $K_1 \times K_2 \times A_p \times N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$ sur la composante connexe de l'identité de $O(n,m)$.

§ 5 MESURE DE HAAR SUR LES GROUPE DE LIE SEMI-SIMPLE

Lemme (5;1)

Soient G , un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, telles que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, A et B , les sous-groupes analytiques de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ respectivement. Alors, si l'application

$$\begin{aligned} \phi : (\alpha, \beta) &\longrightarrow \alpha \beta \\ A \times B &\longrightarrow G \end{aligned}$$

est bijective, il est possible de normaliser les mesures de Haar dg , $d\alpha$, $d\beta$, de G , A et B respectivement de manière à ce que

$$\int_G f(g) dg = \int_{A \times B} f(\alpha\beta) \frac{\det \text{Ad}_B(\beta)}{\det \text{Ad}_A(\beta)} d\alpha d\beta \quad f \in C_c(G)$$

Dém.

Soit L_u la translation à gauche par l'élément u de G ; dL_u l'application tangente correspondante. Comme,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \exp t Y, \beta \exp t Z) &= \alpha \beta (\beta^{-1} \exp t Y \beta) \exp t Z \\ &= \alpha \beta \exp t (\text{Ad}(\beta^{-1}) Y + Z) \quad Y \in \mathfrak{a}, Z \in \mathfrak{b} \end{aligned}$$

nous avons que, pour l'application tangente,

$$\begin{aligned} d\phi_{(\alpha, \beta)} : (dL_\alpha Y, dL_\beta Z) &\longmapsto dL_{\alpha\beta} (\text{Ad}(\beta^{-1}) Y + Z) \\ (A \times B)_{(\alpha, \beta)} &\longrightarrow (G)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

où $(A \times B)_{(\alpha, \beta)}$ et $(G)_{\alpha\beta}$ désignent les espaces tangents respectifs des groupes $A \times B$ et G au point (α, β) et $\alpha\beta$ respectivement.

Supposons maintenant que $\text{Ad}(\beta^{-1}) Y + Z = 0$; alors $Y + \text{Ad}(\beta) Z = Y + \text{Ad}_B(\beta) Z = 0$, d'où $Y = Z = 0$.

Ainsi $d\phi_{(\alpha, \beta)}$ est une application bijective et ϕ est un difféomorphisme de $A \times B$ sur G .

Rappelons qu'une forme différentielle extérieure ρ est dite G -invariante si elle peut être obtenue à partir de la valeur ρ_u en un point u de G par translation à gauche (ou à droite), c'est-à-dire si

$$\rho_u(dL_u X) = \rho_v(dL_v X) \quad \forall u, v \in G \text{ et } \forall X \in \mathfrak{g}$$

Soient alors ω et θ des formes différentielles extérieures, respectivement A et B - invariantes, donnant lieu aux mesures de Haar $d\alpha$ sur A et $d\beta$ sur B . Soit ν la forme différentielle extérieure G -invariante, obtenue par translation de $(\omega \wedge \theta)_e$, (où e désigne l'identité de G). Exprimons $\nu \circ d\phi$, qui est une forme différentielle extérieure sur $A \times B$ à l'aide de ω et θ .

Nous avons :

$$\begin{aligned} (\nu \circ d\phi)_{(\alpha, \beta)}(dL_\alpha Y, dL_\beta Z) &= \nu_{\alpha\beta}(dL_{\alpha\beta}(Ad(\beta^{-1})Y + Z)) \\ &= \nu_e(Ad(\beta^{-1})Y + Z) = (\omega \wedge \theta)_e(Ad(\beta^{-1})Y + Z) \\ &= (\omega_e \wedge \theta_e)(A(\alpha, \beta)(Y, Z)) = \det A(\alpha, \beta) \omega_e \wedge \theta_e(Y, Z) \\ &= \det A(\alpha, \beta) \omega_\alpha \wedge \theta_\beta(dL_\alpha Y, dL_\beta Z) \end{aligned}$$

$$\text{avec } A(\alpha, \beta) : (Y, Z) \longmapsto Ad(\beta^{-1})Y + Z \quad Y \in \mathfrak{a}, Z \in \mathfrak{b}$$

Comme $Ad_G(\beta^{-1})Y + Z = Ad_G(\beta^{-1})(Y + Ad_B(\beta)Z)$ nous avons alors

$$\det A(\alpha, \beta) = \frac{\det Ad_B(\beta)}{\det Ad_G(\beta)} \quad \text{d'où le résultat.}$$

Théorème(5;2)

Soit $G = K A_p N$, une décomposition d'Iwasawa d'un groupe de Lie connexe semi-simple. Soient dk , da , dn , des mesures de Haar invariantes à gauche sur K , A_p et N respectivement. Alors la mesure de Haar dg de G , invariante à gauche, peut être normalisée de manière à ce que :

$$\int_G f(g) dg = \int_{K \times A_p \times N} f(kan) e^{2\rho(\log a)} dk da dn.$$

où $f \in C_c(G)$ et ρ est la demi-somme des racines positives.

Dém.

Le groupe $S = A_p N$ est un sous-groupe fermé de G , contenant A_p et N comme sous-groupes analytiques. De plus $s_0 = h_{p_0} + n_0$.

Considérons maintenant les applications suivantes :

$$\phi : (k, a, n) \longmapsto kan \quad \text{de } K \times A_p \times N \quad \text{sur } G$$

$$\alpha : (k, s) \longmapsto ks \quad \text{de } K \times S \quad \text{sur } G$$

$$\beta : (k, a, n) \longmapsto (k, an) \text{ de } K \times A_p \times N \quad \text{sur } K \times S.$$

Toutes ces applications sont des difféomorphismes et $\phi = \alpha \circ \beta$.

Selon le lemme 5;1 nous avons alors :

$$\int_{K \times S} f(ks) dk ds = \int_{K \times A_p \times N} f(kan) \frac{\det \text{Ad}_N(n)}{\det \text{Ad}_S(n)} dk da dn$$

et par une normalisation appropriée

$$\int_G f(g) dg = \int_{K \times S} f(ks) \frac{\det \text{Ad}_S(s)}{\det \text{Ad}_G(s)} dk ds$$

d'où comme

$$\frac{\det \text{Ad}_S(an)}{\det \text{Ad}_G(an)} \frac{\det \text{Ad}_N(n)}{\det \text{Ad}_S(n)} = \det \text{Ad}_S(a)$$

$$\int_G f(g) dg = \int_{K \times A_p \times N} f(kan) \det \text{Ad}_S(a) dk da dn.$$

Dans l'avant-dernière égalité, nous avons fait usage de la propriété $\det \text{Ad}_G(x) = 1$ et $\det \text{Ad}_N(x) = 1$ qui provient de la semi-simplicité de G et de la nilpotence de N .

Soit $H \in \mathfrak{h}_{p_0}$ tel que $a = \exp H$; alors $\text{Ad}_S(a) = \text{ad}_S(\exp H) = \exp \text{ad}_{S_0} H$ et $\det \text{Ad}_S(a) = \det \exp \text{ad}_{S_0} H = \exp(\text{Tr}(\text{ad}_{S_0} H))$.

Rappelant que les racines sont les poids non nuls de la représentation adjointe de la complexifiée de l'algèbre de Lie de G et que les sous-espaces propres associés à ces différents poids sont de dimension un, nous avons que :

$$\text{Tr } \text{ad}_{\mathfrak{g}_0} H = \sum_{\alpha \in \mathfrak{P}_+} \alpha(H) = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(H) = 2\zeta(H) \quad (\alpha(H) = 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_+, \alpha \notin \mathfrak{P}_+)$$

d'où notre proposition.

§ 6 MESURE DE HAAR SUR $\text{SO}(n, m)$.

Déterminons d'abord la forme linéaire $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$. Nous avons vu (4;8), que les éléments de Δ_+ étaient du type $\lambda_i + \lambda_j$ $1 \leq i \leq n$ $j = i+1, \dots, n$, $2n+1, 2n+3, \dots, \ell-1$.

Dans la somme ci-dessus, les seules contributions qui ne s'annulent pas deux à deux sont celles de :

1) λ_1 qui apparaît $2(n-1) + m-n$ fois

2) λ_2 qui apparaît $(n-2)2 + m-n$ fois

$\vdots$

i) λ_i qui apparaît $(n-i)2 + m-n$ fois

n) λ_n qui apparaît $m-n$ fois,

$$\text{d'où } 2\rho = \sum_{k=1}^n \lambda_k (n+m-2k).$$

Posons $H_i = e_{i, i+n}$ $i = 1, 2, \dots, n$; alors tout élément $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ peut se mettre sous la forme $H = \sum_{i=1}^n t_i H_i$. Ainsi,

$2\rho(H) = 2 \sum_{i=1}^n t_i \rho(H_i) = \sum_{i,k=1}^n t_i (n+m-2k) \lambda_k(H_i)$. Mais $\lambda_k(H_i) = \delta_{i,k}$, par définition de λ_k . Par conséquent

$$(6;1) \quad 2\rho(H) = \sum_{i=1}^n t_i (n+m-2i)$$

Déterminons maintenant les mesures de Haar sur K , A_p et N .

Mesure de Haar sur K.

Comme K est isomorphe au produit direct de $SO(n) \times SO(m)$, nous nous restreindrons à la détermination de la mesure de Haar sur $SO(n)$.

Soient* $X_1, X_2, \dots, X_n$, un système d'axes orthogonaux formant un repère dans l'espace Euclidien E^n ; soit $g_{i,j}(\alpha)$ la rotation d'angle α dans le plan défini par les axes X_i et X_j . Posons d'autre part

$$g_k(\alpha) = g_{k+1,k}(\alpha) \quad \text{et} \quad g^{(k)} = g_1(\theta_1^k) \dots g_k(\theta_k^k).$$

Théorème (6;2)

Tout élément g de $SO(n)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$g = g^{(n-1)} \dots g^{(1)} \quad 0 \leq \theta_1^k < \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta_j^k < \pi \quad j \neq 1$$

Dém. $g_1(\theta_1^k)$ est caractérisé par $(g_1(\theta_1^k))$ facteur de $g^{(k)}$

$$X'_i = X_i \cos \theta_1^k + X_{i+1} \sin \theta_1^k$$

$$X'_{i+1} = -X_i \sin \theta_1^k + X_{i+1} \cos \theta_1^k$$

$$X'_k = X_k \quad k \neq i \text{ et } i+1$$

les autres axes étant laissés fixes.

$$\text{Si } n = 2 \quad g = g^{(1)} = g_1(\theta_1^1)$$

Démontrons le cas général par induction, en supposant le résultat vrai pour $SO(n-1)$.

Soit $\xi_n = (0, \dots, 0, 1)$ un vecteur de E^n . Alors,

$$g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1}) \xi_n = (0, \dots, 0, \sin \theta_{n-1}^{n-1}, \cos \theta_{n-1}^{n-1}).$$

* (Voir Vilenkin, Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. Moscou 1965)

Comme d'autre part $g_i(\theta_i^k) \xi_n = \xi_n \quad k \leq n-1 \quad \text{et} \quad i \leq n-2$, nous avons que

$$g \xi_n = g^{(n-1)} \xi_n \quad \text{d'où} \quad (g^{(n-1)})^{-1} g \xi_n = \xi_n$$

Le vecteur ξ_n est un vecteur de la sphère S^{n-1} . D'autre part, on a que S^{n-1} est difféomorphe à $SO(n)/SO(n-1)$, où $SO(n-1)$ est précisément le sous-groupe d'isotropie du vecteur ξ_n . En conséquence, $(g^{(n-1)})^{-1} g \in SO(n-1)$ et, par hypothèse d'induction, nous avons que :

$$(g^{(n-1)})^{-1} g = g^{(n-2)} \dots g^{(1)}$$

Il est clair que, par construction, nous aurons unicité si nous imposons que $0 \leq \theta_1^k < 2\pi$ et $0 \leq \theta_j^k < \pi$ pour $j \neq 1$.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la mesure de Haar sur $SO(n)$.

Théorème 6;3

Soit dg la mesure de Haar sur $SO(n)$ normalisée de manière à ce que

$$\int_{SO(n)} dg = 1, \text{ alors}$$

$$dg = A_n \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1} \theta_j^k d\theta_j^k$$

$$\text{avec } A_n = \prod_{k=1}^n \Gamma(k/2) / (2\pi^{k/2})$$

Dém.

Soit $X \in E^n$, un vecteur de composantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ et de norme $\|X\| = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2}$.

Introduisons les coordonnées curvilignes suivantes :

$$X_1 = r \sin \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_1$$

$$X_2 = r \sin \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1$$

$$\vdots$$

$$X_{n-1} = r \sin \theta_{n-1} \cos \theta_{n-2}$$

$$X_n = r \cos \theta_{n-1}$$

avec $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ et $0 \leq \theta_k < \pi$ $k \neq 1$

Calculons maintenant le Jacobien de la transformation donnée ci-dessus.

$$\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, r)} = \begin{vmatrix} X_1 \cotg \theta_1, & X_1 \cotg \theta_2, & \dots, & X_1 \cotg \theta_{n-1}, & X_1/r \\ -X_2 \tg \theta_1, & X_2 \cotg \theta_2, & \dots, & X_2 \cotg \theta_{n-1}, & X_2/r \\ 0, & -X_3 \tg \theta_2, & \dots, & X_3 \cotg \theta_{n-1}, & X_3/r \\ 0 & 0 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0, & 0, & 0, & -X_{n-1} \tg \theta_{n-2}, & X_{n-1} \cotg \theta_{n-1}, & X_{n-1}/r \\ 0, & 0, & 0, & 0 & X_n \tg \theta_{n-1}, & X_n/r \end{vmatrix}$$

Nous mettons $X_1, X_2, \dots, X_n$ en facteur et soustrayons la 2ème ligne de la première, la 3ème de la 2ème, etc... En développant alors le déterminant par rapport aux lignes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, r)} &= X_1, X_2, \dots, X_n \frac{1}{\sin \theta_1 \cos \theta_1} \frac{1}{\sin \theta_2 \cos \theta_2} \dots \frac{1}{\sin \theta_{n-1} \cos \theta_{n-1}} \frac{1}{r} \\ &= \sin^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-3} \theta_{n-2} \dots \sin \theta_2 r^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } dX_1 dX_2 \dots dX_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1} dr.$$

Soit $f(\xi)$ une fonction sur S^{n-1} telle que $f(\xi) = g(x)$ pour $x \in S^{n-1}$ ($g(x)$ étant définie sur E^n). Nous avons alors que :

$$\int_{S^{n-1}} f(\xi) d\xi = A \int_{E^n} g(x) \delta(r-1) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

où A est une constante de normalisation.

Comme la mesure $\delta(r-1) dx_1 \dots dx_n$ est invariante par $SO(n-1)$, nous avons que

$$\delta(r-1) dx_1 \dots dx_n = \delta(r-1) r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

d'où $d\xi = A \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$

C'est une mesure $SO(n)$ -invariante sur S^{n-1} .

Pour obtenir la mesure de Haar sur $SO(n)$, nous faisons usage du fait déjà mentionné que, S^{n-1} est difféomorphe à $SO(n)/SO(n-1)$. Ces groupes étant compacts, les mesures de Haar correspondantes sont bi-invariantes. Nous savons, par la théorie de l'intégration dans les espaces homogènes, qu'il est possible d'écrire :

$$\int_{SO(n)} f(g) dg = \int_{SO(n)/SO(n-1)} \left(\int_{SO(n-1)} f(gh) dh \right) d\xi$$

dg et dh étant les mesures de Haar, convenablement normalisées, sur $SO(n)$ et $SO(n-1)$ respectivement.

On obtient donc après itération du procédé :

$$\int_{SO(n)} f(g) dg = \int_{SO(n)/SO(n-1)} \dots \int_{SO(3)/SO(2)} d\xi_n d\xi_{n-1} \dots d\xi_2 f(gh_1 \dots h_{n-1})$$

où $d\xi_i$ est la mesure invariante sur la sphère S^{i-1} .

Ainsi,
$$dg = A_n \prod_{k=2}^{n-1} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1} \theta_j^k d\theta_j^k$$

La détermination de A_n se ramène alors à un calcul classique que nous ne reproduirons pas ici.

Mesure de Haar sur A_p .

Comme A_p est un groupe abélien, homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, on a que $da = dt_1 \dots dt_n$ est une mesure de Haar sur A_p .

Mesure de Haar sur N.

Théorème (6;4)

Dans les notations de (4;14), la mesure

$$dn = d \xi_2^1 d \xi_3^1 \dots d \xi_m^1 d \xi_3^2 \dots d \xi_m^n$$

est une mesure de Haar de N.

(Les seuls ξ_j^i intervenant dans dn sont ceux apparaissant effectivement dans les matrices de $N_1, N_2, \dots, N_n$ respectivement).

Dém.

Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_0$ de N est somme directe des algèbres $\mathfrak{n}_i$, où $\mathfrak{n}_i$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe analytique N_i de N.

Démontrons le résultat par induction sur n. Si $n = 1$, le résultat est trivial car $N = N_1$ est abélien.

Soient $\tilde{n} = n_2 + n_3 + \dots + n_n$ et $\tilde{N}$ le sous-groupe analytique correspondant.

Alors, par le lemme 5;1, nous avons que :

$$\int_N f(n) dn = \int_{N_1 \times \tilde{N}} f(n_1 \tilde{n}) \left(\det \text{Ad}_{\tilde{N}}(\tilde{n}) / \det \text{Ad}_N(\tilde{n}) \right) dn_1 d\tilde{n}$$

où dn_1 et $d\tilde{n}$ sont des mesures de Haar convenablement normalisées sur N_1 et $\tilde{N}$ respectivement. Comme N et $\tilde{N}$ sont nilpotents, $\det \text{Ad}_{\tilde{N}}(\tilde{n}) = \det \text{Ad}_N(\tilde{n})$ et $dn = dn_1 d\tilde{n}$. Mais N_1 est abélien d'où $dn_1 = d \xi_2^1 \dots d \xi_m^1$ (à une normalisation près); et comme $\tilde{N}$ est homéomorphe à $N_2 \times \dots \times N_n$, le résultat s'obtient par induction.

§ 7 QUELQUES SOUS-GROUPES FERMES DE $(SO(n,m))_e$.

Définition. (7;1).- Soit g une algèbre de Lie, $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) \lambda^i$ le polynôme caractéristique de adx . Soit q le plus petit entier tel que a_q soit non identiquement nul.

Un élément $x \in g$ est dit régulier si $a_q(x) \neq 0$, il est dit singulier dans le cas contraire.

Remarque : De la définition des racines d'une algèbre de Lie semi-simple, relativement à une sous-algèbre de Cartan, nous voyons que, si H est un élément régulier de la sous-algèbre de Cartan, alors, $\alpha(H) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$

Soient g_0 l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie semi-simple connexe G , $g_0 = k_0 + h_{p_0} + n_0$ une décomposition d'Iwasawa de g_0 , H un élément singulier de h_{p_0} , Δ' l'ensemble des racines de g (complexifiée de g_0), nulles en H .

La forme de Killing étant non dégénérée sur la sous-algèbre de Cartan h de g , nous identifions h et son dual.

Soient alors h'_{p_0} l'orthogonal de Δ' dans h_{p_0} , h''_{p_0} l'orthogonal de h'_{p_0} dans h_{p_0} , P_- l'ensemble des racines positives nulles sur h_{p_0} , P'_+ (resp. P'_-) l'ensemble des racines de P_+ non nulles (resp. nulles) sur h'_{p_0} . Nous choisissons dans h_{p_0} une base $H_1, \dots, H_n$, de manière à ce que $H_1, \dots, H_p$ forme une base de h'_{p_0} et $H_{p+1}, \dots, H_n$ une base de h''_{p_0} .

Définissons maintenant m' comme sous-espace de g engendré par, h''_{p_0} , h_{k_0} , les X_α et $X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in P_- \cup P'_-$ (X_α étant défini comme dans le théorème (3;1)).

On montre alors que $m'_0 = m' \cap g_0$ est une sous-algèbre réductive de g_0 ayant les propriétés suivantes :

* (Voir : F. Bruhat, Bull. Soc. Math. France 84, 1956, fasc. II, p. 199)

- 1) $h_{k_0} + h''_{p_0}$ est une sous-algèbre de Cartan de m'_0 .
- 2) $m'_0 + h'_{p_0}$ est le centralisateur de h'_{p_0} dans g_0 .
- 3) Si n' est la sous-algèbre de g engendrée par les X_α $\alpha \in P_+$ et $n'_0 = n \cap g_0$, on a que

$$[m'_0, n'_0] \subset n'_0 \quad \text{et} \quad [h'_{p_0}, n'_0] \subset n'_0.$$

De plus, $s'_0 = m'_0 + h'_{p_0} + n'_0$ est une sous-algèbre de g_0 et s'_0 est le normalisateur de n'_0 dans g_0 .

Posons maintenant

$$A'_p = \exp h'_{p_0} \quad \text{et} \quad N' = \exp n'_0.$$

$A'_p N'$ est un sous-groupe analytique de G engendré par $h'_{p_0} + n'_0$; c'est un sous-groupe fermé résoluble de G .

Soit M'_0 le sous-groupe analytique de G engendré par m'_0 ; alors $M'_0 A'_p$ et $M'_0 A'_p N'$ sont des sous-groupes fermés de G , comme composantes connexes de l'identité du centralisateur de A'_p dans G et du normalisateur de N' dans G respectivement.

Soit $\tilde{M}'_0$ le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie m'_0 ; comme A'_p est simplement connexe, M'_0 est l'image de $\tilde{M}'_0$ dans l'application canonique de $\tilde{M}'_0 \times A'_p$ sur $M'_0 A'_p$, donc est un sous-groupe fermé de G .

Soit enfin M'_K le centralisateur de A'_p dans K . Posons $M' = M'_K M'_0$ et $\Gamma' = M' A'_p N'$. M' et Γ' sont des sous-groupes de G ayant M'_0 et $M'_0 A'_p N'$ comme composante connexe de e ; ils sont fermés car ils contiennent le centre Z de G , et leur image dans G/Z est fermée comme produit d'un sous-groupe fermé par le sous-groupe compact M'_K/Z .

Groupe de Weyl. (restreint)

Dans le cas où $h_{p_0} = h'_{p_0}$ l'algèbre de Lie m'_0 , que nous désignerons alors par m_0 est engendrée par des éléments de k_0 , seulement.

Ainsi M_0' est la composante neutre de M' , que nous désignerons dans ce cas par M . Soit alors $\tilde{M}$ le normalisateur de $\mathfrak{h}_{p_0}$ dans K .

$$\tilde{M} = \{k \in K : \text{Ad}(k) H \in \mathfrak{h}_{p_0} \quad \forall H \in \mathfrak{h}_{p_0}\}.$$

$\tilde{M}$ a les propriétés suivantes :

1. $\tilde{M}$ est un sous-groupe fermé de K
2. M est un sous-groupe distingué de $\tilde{M}$
3. $\mathfrak{m}_0$ est l'algèbre de Lie de $\tilde{M}$.

Démontrons le dernier point.

Soit $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ l'algèbre de Lie de $\tilde{M}$. Si $y \in \tilde{\mathfrak{m}}_0$, on a manifestement

$$[y, H] \in \mathfrak{h}_{p_0} \quad \forall H \in \mathfrak{h}_{p_0}, \text{ et ainsi, en faisant usage de l'invariance}$$

de la forme de Killing,

$$(\text{ad } H \cdot y, \text{ad } H \cdot y) = -((\text{ad } H)^2 y, y)$$

Comme $(\text{ad } H)^2 y = 0 \quad \forall H \in \mathfrak{h}_{p_0}$, l'expression ci-dessus est nulle et $\text{ad } H \cdot y = 0$, d'où $y \in \mathfrak{m}_0$.

Définition. (7;2)- On appelle groupe de Weyl restreint W , le groupe quotient $\tilde{M}/M$.

Remarquons que ce groupe est fini car M et $\tilde{M}$ sont compacts et ont même algèbre de Lie.

Les sous-groupes Γ' et W nous seront utiles pour définir des représentations induites et obtenir un critère d'irréductibilité.

Cas de $(SO(n, m))_e$.

Déterminons maintenant M_0' dans le cas de $(SO(n, m))_e$. Comme $M'A'_p$ est le centralisateur de $\mathfrak{h}'_{p_0}$ dans G , ses éléments doivent satisfaire à des relations du type $p H = H p$, $H \in \mathfrak{h}'_{p_0}$ et $p \in M'A'_p$.

Cette équation peut alors s'écrire schématiquement sous la forme,

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \\
 \hline
 \text{G} & \text{H} & \text{I} & \text{J} \\
 \hline
 \text{L} & \text{M} & \text{N} & \text{O} \\
 \hline
 \text{Q} & \text{R} & \text{S} & \text{T} \\
 \hline
 \text{V} & \text{W} & \text{X} & \text{Y}
 \end{array}
 \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 \text{P} & \text{A} & \text{P} & \text{P} & \text{P} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{X} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{X} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 \text{C} & \text{A} & \text{P} & \text{P} & \text{P} \\
 \hline
 \text{A} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{M} & \text{O} & \text{X} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{R} & \text{O} & \text{P} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{W} & \text{O} & \text{U} & \text{O} & \text{O}
 \end{array}$$

et de manière similaire

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 \text{P} & \text{A} & \text{P} & \text{P} & \text{P} \\
 \hline
 \text{XK} & \text{XL} & \text{XM} & \text{XN} & \text{XO} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{XA} & \text{XB} & \text{XC} & \text{XD} & \text{XE} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O}
 \end{array}
 \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 \text{P} & \text{A} & \text{P} & \text{P} & \text{P} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O}
 \end{array}$$

Nous voyons donc que si p est un élément de $M'A'$ nous avons les relations suivantes :

$B=D=E=H=P=J=W=O=\tilde{O}=N=O$ et $CX = XK, AX = XM$. Ainsi $C=K$ et $A=M$; les matrices A, C, K, M , sont diagonales.

Ainsi,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 \text{P} & \text{A} & \text{P} & \text{P} & \text{P} \\
 \hline
 \text{A} & \text{O} & \text{C} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{G} & \text{O} & \text{I} & \text{J} \\
 \hline
 \text{X} & \text{O} & \text{M} & \text{O} & \text{O} \\
 \hline
 \text{O} & \text{Q} & \text{O} & \text{S} & \text{T} \\
 \hline
 \text{O} & \text{V} & \text{O} & \text{X} & \text{Y}
 \end{array}$$

Nous voyons d'autre part que si l'on pose

$$a = \begin{array}{c|ccc} & p & n & p+n \\ \hline p & A & 0 & C & 0 \\ \hline n & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline p+n & K & 0 & M & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad e + \quad m = \begin{array}{c|ccccc} & p & n & p+n & 2n \\ \hline p & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline n & 0 & 0 & 0 & I & J \\ \hline p+n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2n & 0 & 0 & 0 & S & T \\ \hline & 0 & V & 0 & X & Y \end{array}$$

alors $am = ma$, a et $m \in O(n, m)$

De plus, tenant compte des relations de définition de $O(n, m)$ (1;2) nous avons que :

$$A = \begin{vmatrix} ch_1 & & \\ & ch_2 & \\ & & \ddots \\ & & & ch_p \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} sh_1 & & \\ & sh_2 & \\ & & \ddots \\ & & & sh_p \end{vmatrix}$$

Ainsi $a \in A'_p$ et m est isomorphe à un élément de $O(n, m)$, d'où

Proposition (7;3)

M_0' est isomorphe à $(SO(n-p, m-p))_e$.

Déterminons maintenant M_k' et étudions à cet effet l'équation $Ad(k) H = \tilde{H}$ lorsque H et $\tilde{H} \in h'_{p0}$ et $k \in K$.

Cette équation peut s'écrire schématiquement sous la forme,

$$\begin{array}{c|cc} n & 2n \\ \hline A & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & D \\ \hline 0 & C & E \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} n & 2n \\ \hline 0 & X & 0 \\ \hline X & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} n & 2n \\ \hline {}^tA & 0 & 0 \\ \hline 0 & {}^tB & {}^tC \\ \hline 0 & {}^tD & {}^tE \end{array} = \begin{array}{c|cc} n & 2n \\ \hline 0 & \tilde{X} & 0 \\ \hline \tilde{X} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

où $A \in SO(n)$

$$\left| \begin{array}{c|c} B & D \\ \hline C & E \end{array} \right| \in SO(m) \quad \text{et} \quad X = \begin{vmatrix} t^1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & t^n \end{vmatrix}$$

Comme H est singulier, certains des t_i sont identiquement nuls. Désignons par I_1 (resp. I_2) l'ensemble des indices correspondant au t_i de h'_{p_0} (resp. au t_i de h''_{p_0}). Nous choisissons d'autre part, comme dans le cas général, une base de h_{p_0} indicée de manière à avoir d'abord les éléments de I_1 .

En effectuant la multiplication matricielle nous obtenons :

$$\begin{array}{c} n \\ \hline \begin{vmatrix} O & A^t B & A^t C \\ \hline B^t A & O & O \\ \hline C^t A & O & O \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} n \\ \hline \begin{vmatrix} O & \tilde{X} & O \\ \hline \tilde{X} & O & O \\ \hline O & O & O \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2n \\ \hline \end{array}$$

Comme X et $\tilde{X}$ sont symétriques nous tirons de cette relation les conditions suivantes :

$$(7;4) \quad A X^t C = 0 \quad \text{et} \quad (7;5) \quad A X^t B = \tilde{X}$$

Comme $\det A \neq 0$ (par définition de K) (7;4) devient $X^t C = 0$, ce qui est équivalent à ,

$$C_j^k = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad k \in I_1$$

La relation (7;5) est d'autre part équivalente aux relations,

$$a_q^k t^q = b_q^k t^k \quad k, q = 1, 2, \dots, n$$

Quelques cas particuliers.

$$1. \quad X = \tilde{X} \quad (t^q = \tilde{t}^q)$$

Les t^q étant arbitraires sur I_1 nous avons que:

$$a_{q,k}^k = 0 \quad q \in I_1 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad q \neq k$$

$$b_{q,k}^k = 0 \quad k \in I_1 \quad q = 1, 2, \dots, n \quad q \neq k$$

Nous voyons donc que les I_1 premières colonnes de A n'ont que le terme diagonal non nul; comme $A \in SO(n)$ ces éléments diagonaux valent 1 ou -1. Finalement les colonnes de B et C étant nulles pour les mêmes indices (à l'exception du terme diagonal de B), nous avons, par un raisonnement similaire à celui fait ci-dessus que :

$$a_{k,j}^j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad k \in I_1 \quad \text{et}$$

$$b_{k,q}^q = 0 \quad k \in I_1 \quad q = 1, 2, \dots, n \quad q \neq k \quad b_{k,k}^k = 1 \text{ ou } -1 \quad k \in I_1$$

Nous voyons donc immédiatement que les éléments de M_k sont de la forme suivante :

	p	n	p+n	2n
p	1 ou -1	0	0	0
n	0	0(n-p)	0	0
p+n	0	0	1 ou -1	0
2n	0	0	0	/
	0	0	0	0(m-p)

Remarque : Si $h_{p_0} = h_{p_0}^1$ on obtient les éléments de M. Comme alors $C = D = 0$ il est facile de voir que les éléments de M sont de la forme suivante :

	n	2n
n	1 ou -1	0
2n	0	1 ou -1
	0	0
		SO(m-n).

La composante neutre de M est donc isomorphe à $SO(m-n)_e$.

2. $X \neq \tilde{X}$ et $h'_{p_0} = h_{p_0}$ (c'est-à-dire $k \in \tilde{M}$).

Nous savons alors que $C = D = 0$ et que nous avons la relation

$$a_q^k t^q = b_q^k \tilde{t}^k \quad k, q = 1, 2, \dots, n$$

Supposons que a_q^k et $a_q^{k'} \neq 0$ pour $k \neq k'$ et montrons qu'alors l'image de h_{p_0} par l'application

$$(7;6) \quad X \longrightarrow A X {}^t B$$

est de dimension $< n$; d'où une contradiction car $\det A \neq 0$ et $\det B \neq 0$.

Posons $a_q^k = \lambda_{k,k'} a_q^{k'}$ $\lambda_{k,k'} \in \mathbb{R}$

Nous avons donc que : $b_q^{k'} \tilde{t}^{k'} - \lambda_{k,k'} b_q^k \tilde{t}^k = 0$.

Cette relation étant linéaire entre $\tilde{t}^k$ et $\tilde{t}^{k'}$, l'espace image est de dimension $< n$.

Nous voyons que nous avons un et un seul coefficient non nul dans chaque colonne de A , valant 1 ou -1, puisque A et $B \in O(n)$. De plus $|a_q^k| = |b_q^k|$. Enfin l'application (7;6) est (au signe près) une permutation des éléments de X .

Définissons maintenant, dans M , un ensemble de représentants des classes de $\tilde{M}$ modulo M .

Avec les notations définies ci-dessus, nous voyons que tout élément de $\tilde{M}$ est caractérisé complètement par le triplet de matrices (A, B, E) , où $A \in SO(n)$, $B \in O(n)$ et $E \in O(m-n)$; de plus $\det A = \det B \det E = 1$.

Soient (A, B, E) et $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{E})$ 2 éléments de $\tilde{M}, J$ (resp. J') le sous-ensemble de M formé des matrices $n \times n$, diagonales, de coefficients non nuls 1 ou -1 et de déterminant 1 ou -1 (resp. 1).

Dire que ces 2 éléments sont dans la même classe revient à dire que $(A\tilde{A}^{-1}, B\tilde{B}^{-1}, E\tilde{E}^{-1})$ est un élément de M . Plus précisément, en tenant compte de $(7;5)$, nous avons les conditions suivantes :

1. $A\tilde{A}^{-1} = B\tilde{B}^{-1} = k \in J'$
2. $E\tilde{E}^{-1} \in SO(m-n)$.

Comme les coefficients des matrices A et B sont au signe près les mêmes, il existe I et $I' \in J'$ tels que $B = AI$ et $\tilde{B} = \tilde{A}I'$.

Alors de 1. on tire que, $B\tilde{B}^{-1} = AII'^{-1}\tilde{A}^{-1} = A\tilde{A}^{-1}$, d'où $I = I'$.

Distinguons maintenant deux cas :

1) $B \in SO(n)$.

Si $B \in SO(n)$ on a que, par $(1;3)$, $E \in SO(m-n)$ et, comme $A \in SO(n)$, $I \in SO(n)$. La classe de $(A,B,E) = (A, AI, E)$ est donc l'ensemble des éléments de la forme $(kA, kAI, \tilde{E})$, où I est fixe, k parcourt J' et $\tilde{E}$ parcourt $SO(m-n)$.

2) $B \in O(n) \quad B \notin SO(n)$.

Posons $B' = BU_n$ où $B' \in SO(n)$ et U_n est la matrice de coefficients $\delta_{1,j}$ $j=1,2,\dots,n$ et $\delta_{i,j}$ $i=2,3,\dots,n, j=1,2,\dots,n$. Soit d'autre part $E' = EU_{m-n}$; comme $B = B'U_n = AI$, il existe $I' \in J'$ tel que $B = A'I'_n$ et la classe de $(A,B,E) = (A,A'I'_n, E'U_{m-n})$ est formée des éléments de la forme

$$(kA, kA'I'_n, \tilde{E}'U_{m-n}) \quad I' \text{ étant fixe, } k \text{ parcourant } J' \text{ et } \tilde{E}' \text{ parcourant } SO(m-n).$$

Remarquons que dans les deux cas, à des I (resp. I') différents, correspondent des classes distinctes. Il ne reste donc qu'à définir un moyen d'obtenir des A donnant lieu à des classes distinctes.

Il est clair que pour tout élément (A,B,E) de $\tilde{M}$, il existe un $k \in J'$ tel que $kA = \tilde{A}$ ait tous ses coefficients non nuls positifs, (à l'exception éventuelle de celui de la première colonne, afin que $\det \tilde{A} = 1$).

Soit L , l'ensemble des $A \in SO(n)$ ayant cette propriété et tels que $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{E}) \in \tilde{M}$.

Proposition (7;7)

A tout couple (A, I) où $A \in L$ et $I \in J'$, correspondent deux classes distinctes d'éléments de $\tilde{M}$ modulo M . De plus, à deux couples distincts (A, I) et (A', I') , où $A \neq A'$ et $I \neq I'$, correspondent des classes distinctes.

Dém. Soit $A, A' \in L$ $A \neq A'$. Alors il n'existe aucun $I' \in J'$ tel que $A = I'A'$ (par construction de L); d'où le résultat, moyennant la remarque ci-dessus.

Remarque : Nous pourrions prendre comme ensemble représentatif des classes de $\tilde{M}$ modulo M les éléments suivants :

$$(A, AI, \text{identité}) \text{ et } (A, AIU_n, U_{m-n}) \quad I \in J' \text{ et } A \in L$$

Pour les éléments représentatifs des classes, l'équation $AX^t B = \tilde{X}$ devient :

$$AXI^t A = \tilde{X} \text{ si } B=AI \text{ } A, I \in SO(n) \text{ ou } AXU_n I^t A = \tilde{X} \text{ si } B=U_n AI \text{ } U_n \in SO(n).$$

Comme les applications $X \rightarrow XI$ et $X \rightarrow XU_n I$ changent les signes de certains t_i de la matrice X et que l'application $X \rightarrow AX^t A$ est une permutation des éléments de X , nous avons la proposition,

Proposition (7;8)

Le groupe de Weyl est isomorphe au produit direct du groupe des permutations de n éléments et du groupe à deux éléments.

Définissons maintenant N' . A cet effet rappelons que N' est le sous-groupe analytique de G engendré par n_0' . Comme P_+ est formé des racines $\lambda_i \pm \lambda_j$ $i=1, \dots, n$ $j=i+1, \dots, n, 2n+1, \dots, \ell-1$, auxquelles on ajoute λ_i $i=1, \dots, n$, si m est impair, on voit que, en définissant I_1 et I_2 comme précédemment, P_+ est l'ensemble des $\lambda_i \pm \lambda_j$ pour lesquelles $i \in I_1$ $j=i+1, \dots, n, 2n+1, \dots, \ell-1$. Dans le cas impair on ajoute λ_i $i \in I_1$.

Nous voyons maintenant que, par un raisonnement analogue à celui fait pour n_0 , n_0' est engendré par les

$$X_j^i = e_{i,j} + e_{i+s,j} \quad i \in I_1 \quad j=i+1, \dots, n, 2n+1, \dots, l-1$$

$$s=1 \quad \text{si } i \leq n \text{ et } s=n \text{ si } i > n.$$

Définissons donc N' par exponentiation. On a alors (page 21) que,

$$(7;9) \quad N' = N_1 N_2 \dots N_p$$

§ 8 LES REPRÉSENTATIONS IRREDUCTIBLES DE DIMENSION FINIE DE Γ' .

Soit $x \rightarrow T_x$ une représentation irréductible de Γ' dans un espace vectoriel V de dimension finie. La restriction de cette représentation au sous-groupe résoluble connexe $S=A'_p N'$ implique, par le théorème de Lie, qu'il existe un vecteur $\xi \in V - \{0\}$ et un caractère α de S tels que,

$$T_x \xi = \alpha(x) \xi \quad \forall x \in S.$$

Ainsi, α est une représentation de dimension 1 de S et, N' étant le sous-groupe commutateur de S , $\alpha(n)=1 \quad \forall n \in N'$.

D'autre part,

$$T_{an} T_m \xi = T_{anm} \xi = T_{amm^{-1}nm} \xi = T_m T_{an'} \xi = \alpha(a) T_m \xi$$

où $n' = m^{-1}n \quad m \in N' \quad \text{et} \quad m \in M'.$

L'ensemble $T_m \xi, m \in M'$, engendre donc un sous-espace stable W de V pour la représentation $x \rightarrow T_x$ de Γ' . Comme cette représentation est irréductible $W = V$.

Remarquons enfin que la représentation $x \rightarrow T_x$ restreinte aux éléments de M' est, de façon triviale, une représentation irréductible de M' .

§ *9 REPRÉSENTATIONS ET ALGÈBRES $L(\delta)$.

Soit G un groupe de Lie semi-simple, connexe. Par représentation de G , sur un espace de Banach $\mathcal{H}$, on entend, un homomorphisme $g \rightarrow T_g$ de G dans le groupe des opérateurs bornés, non singuliers sur $\mathcal{H}$, avec la condition que $g \rightarrow T_g$ a soit une application fortement continue de G dans $\mathcal{H}$, $\forall a \in \mathcal{H}$.

* (Les résultats de ce paragraphe sont tirés de :

1. R. Godement : A Theory of spherical Functions. Trans. Amer. math. Soc. t. 73, 1952, p. 496-556.
2. J. Dixmier : Sur les représentations de certains groupes orthogonaux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 250, p. 263-5.
3. F. Bruhat : Loc. cit. page 29.)

Définition (9;1).— Soit A une algèbre associative sur C et soit $x \rightarrow T_x$ une représentation linéaire de A par des opérateurs bornés sur un espace de Banach $\mathcal{H}$; alors la représentation donnée est dite complètement irréductible si tout opérateur borné sur $\mathcal{H}$ est une limite forte d'opérateurs T_x . Tous les résultats de ce paragraphe vont dépendre essentiellement du lemme suivant.

Lemme (9;2)

Soit A une algèbre associative sur C , et soit n un entier fini. Supposons que A ait suffisamment de représentations linéaires de dimensions $\leq n$. Alors toute représentation complètement irréductible de A est de dimension $\leq n$.

Dém. Soit M_n l'algèbre des matrices $n \times n$. Montrons d'abord qu'il existe un polynôme ayant les propriétés suivantes :

1. $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dépend linéairement de chaque x_i .
2. $P(A_1, A_2, \dots, A_r) = 0 \quad \forall A_1, \dots, A_r \in M_n$.
3. Il existe $A_1, \dots, A_r \in M_{n+1}$ tels que $P(A_1, \dots, A_r) \neq 0$.

Définissons sur A le polynôme $P(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{r!} \sum \varepsilon(\pi) x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(r)}$, où la somme est effectuée sur l'ensemble des permutations π et où $\varepsilon(\pi)$ vaut 1 ou -1 selon que π est pair ou impair. Manifestement, $P(x_1, \dots, x_r)$ dépend linéairement de chaque x_i . On pourra donc se restreindre à vérifier la propriété de P pour les éléments d'une base de M_n ou de M_{n+1} .

Soit $r(n)$ le plus petit entier tel que $P(A_1, \dots, A_r) = 0 \quad \forall A_1, \dots, A_r \in M_n$.

Un tel $r(n)$ existe toujours, car si $r(n) = n^2 + 1$, et si $A_1, \dots, A_r$ sont $n^2 + 1$ éléments d'une base de M_n , deux au moins, parmi ceux-ci, sont égaux et par construction $P(A_1, \dots, A_r) = 0$.

Montrons maintenant qu'il existe une borne inférieure pour $r(n)$. Soit $t = r(n) - 1$; supposons que $B_1, \dots, B_t$ soient des éléments de M_n tels que $P(B_1, \dots, B_t) \neq 0$. Supposons plus précisément le coefficient $(P(B_1, \dots, B_t))_{h,k} \neq 0$. Prolongeons maintenant les matrices B_i à des matrices de M_{n+1} , par adjonction d'une ligne et d'une colonne de zéros; alors il est évident que

$P(B_1, \dots, B_t, e_{k,n+1}, e_{n+1,n+1}) \neq 0$ où $(e_{i,j})$ est la matrice ayant tous ses coefficients nuls, à l'exception de celui d'indice (i,j) de valeur 1.

Ainsi $r(n+1) \geq r(n) + 2$ et comme $r(1) = 2$, on a que $r(n) \geq 2n$.

Comme A a suffisamment de représentations et comme $\pi(P(x_1, \dots, x_r)) = P(\pi(x_1), \dots, \pi(x_r)) = 0$ pour chaque représentation π de dimension $\leq n$, on a que $P(x_1, \dots, x_r) = 0$ quel que soit $x_1, \dots, x_r \in A$. De ce fait si $x \rightarrow T_x$ est une représentation complètement irréductible de A sur un espace de Banach $\mathcal{H}$, nous avons $P(T_{x_1}, \dots, T_{x_r}) = 0$. Soit alors $A_1, \dots, A_r$ des opérateurs bornés quelconque sur $\mathcal{H}$; approchons A_1 par des opérateurs T_{x_1} . Vu la linéarité de P en x_1 , nous avons $P(A_1, T_{x_2}, \dots, T_{x_r}) = 0$ et de proche en proche $P(A_1, \dots, A_r) = 0$.

Supposons maintenant que $\mathcal{H}$ contienne un sous-espace F de dimension $n+1$. Notons $A_1, \dots, A_r$ des opérateurs quelconques de F . F étant de dimension finie, les A_i sont induits par des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$. Ainsi $P(A_1, \dots, A_r) = 0$ en contradiction avec la propriété 3 de P .

Les algèbres $L(\delta)$.

Soit G un groupe de Lie semi-simple de centre fini et K un sous-groupe compact de G .

Soient δ une représentation irréductible de K , χ_δ le caractère normalisé de δ . ($\chi_\delta * \chi_\delta = \chi_\delta$).

Soit $L(G)$ l'algèbre des fonctions continues à support compact (algèbre pour le produit de convolution); alors l'ensemble $L(\delta)$ des fonctions $f \in L(G)$ tels que $\bar{\chi}_\delta * f = f * \bar{\chi}_\delta = f$ est une sous-algèbre de $L(G)$.

Soit $g \rightarrow T_g$ une représentation de G dans un espace de Banach $\mathcal{H}$.

Posons $E(\delta) = \int T_k \bar{\chi}_\delta(k) dk$

On voit facilement que 1. $E(\delta) E(\delta) = E(\delta)$

(9;3) 2. $E(\delta) E(\delta') = 0 \quad \delta \neq \delta'$

3. $E(\delta) T_k = T_k E(\delta) \quad \forall k \in K.$

$E(\delta)$ est donc une projection continue de $\mathcal{H}$ sur un sous-espace fermé $\mathcal{H}(\delta)$.
 De plus, si $x \in \mathcal{H}(\delta)$, $T_k x \in \mathcal{H}(\delta) \quad \forall k \in K$. Il est alors clair que la restriction de T_k à $\mathcal{H}(\delta)$ ne contient que des composantes du type δ .
 Si $\dim \mathcal{H}(\delta) = p \dim(\delta)$ est finie, on dit que δ est contenue p fois dans la représentation $k \rightarrow T_k$ de K .

Nous avons d'autre part que,

$$E(\delta) T_f E(\delta) = \int_{k=k \times G} T_{k,g} f(g) \bar{\chi}_\delta(k) \bar{\chi}_\delta(k') dk dk' dg = T_{\tilde{f}}$$

où $\tilde{f} = \bar{\chi}_\delta * f * \bar{\chi}_\delta \quad f \in L(G).$

Ainsi si $f \in L(\delta)$, $E(\delta) T_f E(\delta) = T_f$ et $\mathcal{H}(\delta)$ est stable pour T_f . De plus, si $\tilde{T}_f$ est l'opérateur induit par T_f sur $\mathcal{H}(\delta)$, nous avons que $\tilde{T}_f = 0$ est équivalent à $T_f = 0$.

Lemme (9;4)

Soit $g \rightarrow T_g$ une représentation complètement irréductible de G sur $\mathcal{H}$;
 alors pour tout δ , la représentation $f \rightarrow \tilde{T}_f$ de $L(\delta)$ sur $\mathcal{H}(\delta)$ est complètement irréductible.

Dém. Soit A un opérateur borné sur $\mathcal{H}(\delta)$; étendons-le à $\mathcal{H}$ par la condition $Aa = A E(\delta) a \quad \forall a \in \mathcal{H}$. La représentation de G étant complètement irréductible, il existe un ensemble de $f_i \in L(G)$ tel que T_{f_i} converge fortement vers A sur $\mathcal{H}$. Posons alors $g_i = \bar{\chi}_\delta * f_i * \bar{\chi}_\delta$. Il est clair que $g_i \in L(\delta)$; de plus nous avons que $\lim T_{g_i} a = \lim \tilde{T}_{g_i} a = \lim E(\delta) T_{f_i} E(\delta) a = \lim E(\delta) T_{f_i} a = A a \quad \forall a \in \mathcal{H}(\delta)$, ce qui montre que T_{g_i} converge fortement vers A sur $\mathcal{H}(\delta)$.

Définition (9;5).- Un ensemble de représentations Ω de G est dit complet si, pour toute fonction non identiquement nulle $f \in L(G)$, il existe un élément T d'une représentation de Ω telle que $T_f \neq 0$.

Lemme (9;6)

Soit Ω un ensemble complet de représentations de G . Supposons que, pour un δ donné, δ soit contenu au plus p fois (p fini) dans chaque élément de Ω . Alors δ est contenu au plus p fois dans toutes représentations complètement irréductibles de G .

Dém. On sait que, $\forall f \in L(\delta)$, $\tilde{T}_f = 0$ est équivalent à $T_f = 0$, d'où les représentations $f \rightarrow T_f$ de $L(\delta)$ associées aux différents éléments de Ω forment un système complet de représentations de $L(\delta)$ dont la dimension est $\leq n = p \dim(\delta)$. Par le lemme (9;2) on a donc que toute représentation complètement irréductible de $L(\delta)$ est de dimension $\leq n$, d'où le résultat par le lemme (9;4). Il nous reste à démontrer un théorème plus précis qui nous montre dans quel cas p est fini; puis à exhiber un ensemble complet de représentations (de dimension finie) de C .

Théorème (9;7)

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe de centre fini, K un sous-groupe compact maximal de G , $G = K A_p N$ une décomposition d'Iwasawa de G et M_0 la composante connexe du centralisateur de A_p dans K . Soit δ une représentation irréductible de K , et p un entier tel que toute représentation irréductible de M_0 soit contenue au plus p fois dans la restriction de δ à M_0 . Alors δ est contenue au plus p fois dans la restriction à K de toute représentation complètement irréductible de G .

Avant d'entreprendre la démonstration, donnons d'abord une définition.

Définition (9;8).— Soient T un groupe topologique, T' un sous-groupe. Pour toute représentation σ' de T' dans un espace de dimension finie V' , définissons l'espace V des applications continues de T dans V' , telles que $\theta(t't) = \sigma'(t') \theta(t)$ pour tout $t' \in T'$ et $t \in T$; alors la représentation σ de T dans V définie par $(\sigma(t)\theta)(t_1) = \theta(t_1 t)$ pour $t_1, t \in T$ est appelée représentation induite par σ' , on la note $\sigma = \text{ind } \sigma'$.

Lemme (9;9)

Toute représentation irréductible π de dimension finie de T est contenue dans une représentation de la forme $\text{ind } \sigma'$, où σ' est une représentation irréductible de dimension finie de T' .

Dém. Soient W l'espace de la représentation π de T , σ' une représentation irréductible de T' obtenue comme quotient de $\pi|_{T'}$.

Soient V' l'espace de la représentation de σ' et ω l'application canonique de W dans V' .

Soit V l'espace de la représentation $\sigma = \text{ind } \sigma'$.

Pour tout $a \in W$ soit θ_a l'application de T dans V' définie par $\theta_a(t) = \omega(\pi(t)a)$.

Montrons que : 1. $\theta_a \in V$

2. L'application $a \rightarrow \theta_a$ est un isomorphisme du T -module W sur un sous-module de V .

Soit $t' \in T'$ et $t \in T$, alors $\theta_a(t't) = \omega(\pi(t')\pi(t)a) = \sigma'(t')\theta_a(t)$.

La dernière égalité résulte de la définition même de σ' .

Pour démontrer 2, remarquons que l'application $a \rightarrow \theta_a$ est injective. En effet, si $\theta_a(t) = \theta_b(t) \quad \forall t \in T$, nous avons que $\omega(\pi(t)(a-b)) = 0$. Comme, si $a \neq b$, les combinaisons linéaires finies d'éléments du type $\pi(t)(a-b)$ sont dense dans W , $\omega : W \rightarrow 0$ ce qui est contradictoire; d'où $a = b$.

Finalement comme $\theta_a(t_1 t) = \theta(\pi(t_1)a)(t)$, nous avons bien un sous-module de V .

Lemme (9;10)

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe ayant une représentation fidèle (de dimension finie); alors G a un ensemble complet de représentations irréductibles de dimension finie.

Dém. Soit $g \rightarrow T_g$ une représentation de G sur un espace vectoriel $\mathcal{H}$.

Appelons coefficients de la représentation les fonctions $\theta(g) = (T_g a, a')$

où $a \in \mathcal{H}$ et $a' \in \mathcal{H}'$ (dual de $\mathcal{H}$).

Soit C_f l'ensemble des combinaisons linéaires des coefficients des représentations irréductibles de dimension finie de G . Puisque G a une représentation fidèle, nous avons que, par décomposition de cette dernière en composantes irréductibles,

$$\theta(g') = \theta(g'') \quad \forall \theta \in C_f \quad \text{implique } g' = g''.$$

D'autre part, le produit de deux coefficients est un coefficient, car le coefficient d'un produit tensoriel de représentation est le produit des coefficients de ses composantes. Il en est de même du complexe conjugué d'un coefficient, puisque la conjuguée complexe d'une représentation est une représentation.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème de Stone-Weierstrasse. Ainsi toute fonction continue sur G peut être approchée uniformément sur tout compact par des éléments de C_f .

Soit $f \in L(G)$ une fonction non identiquement nulle, il existe donc un $\theta \in C_f$ tel que $\int f(g)\theta(g) dg \neq 0$. Mais $(T_f a, a') = \int (T_g a, a') f(g) dg = \int f(g)\theta(g) dg \neq 0$ d'où le résultat.

Démonstration du théorème.

Les deux lemmes ci-dessus montrent que les représentations de G de la forme $\sigma = \text{ind } \sigma'$, où σ' est une représentation irréductible de $M_0 A_p N$ dans un espace V' de dimension finie, constituent un système complet de représentations de G .

En tenant compte de la forme particulière des représentations irréductibles de $M_0 A_p N$, (voir § 8), l'espace V de σ peut s'identifier à l'espace des applications continues $\eta : K \rightarrow V'$ telles que $\eta(mk) = \sigma'(m)\eta(k)$ pour $m \in M_0$ et $k \in K$.

On a de plus que $(\sigma(k)\eta)(k_1) = \eta(k_1 k)$ pour $k_1, k \in K$, c'est-à-dire que $\sigma|_K$ est la représentation de K induite par $\sigma'|_{M_0}$. Mais $\sigma'|_{M_0}$ est irréductible, donc, en vertu du théorème de réciprocité de Frobenius dans le cas compact, σ contient δ autant de fois que $\delta|_{M_0}$ contient $\sigma'|_{M_0}$ donc au plus p fois. D'où le résultat par application du lemme (9;6).

Dans le cas de $(SO(n,m))_e$, le sous-groupe compact maximal K est isomorphe à $SO(n) \times SO(m)$; de plus M_0 est isomorphe à $SO(m-n)$. Comme les représentations de $SO(n) \times SO(m)$ sont définies à l'aide du produit tensoriel des représentations irréductibles de $SO(m)$ et de $SO(n)$, nous pourrions limiter notre étude à la détermination de p pour $K = SO(m)$ et $M_0 = SO(m-n)$.

Une étude détaillée de $SO(n)$, (Toroïde maximal, diagramme de Stiefel et caractères), permet de montrer que toute représentation irréductible D de $SO(n)$ est caractérisée par une suite finie d'entiers, (Poids dominant de la représentation).

Désignons donc par ${}^n D_{m_1, \dots, m_p}$ une représentation irréductible de $SO(n)$, de poids dominant $m_1, \dots, m_p$. On a alors le théorème suivant que nous donnerons sans démonstration.

Théorème (9;10)*

Avec les notations définies ci-dessus nous avons les relations suivantes :

$$a) \quad 2^{q+1} D_{m_1, \dots, m_q} = \sum 2^q D_{m_1', \dots, m_q'}$$

où la somme parcourt tous les entiers des systèmes (m') satisfaisant à $m_1 \leq m_1' \leq m_2 \leq m_2' \dots m_q \leq |m_q'|$

$$b) \quad 2^q D_{m_1, \dots, m_q} = \sum 2^{q-1} D_{m_1', \dots, m_{q-1}'}$$

où la somme parcourt tous les systèmes (m') satisfaisant à

$$m_1 \leq m_1' \leq \dots m_{q-1}' \leq m_q$$

Ce théorème nous montre que si M_0 est isomorphe à $SO(m-1)$ (c'est-à-dire si $n=1$), alors les représentations irréductibles de M_0 n'apparaissent qu'une fois dans celles de M_0 obtenues par restriction à M_0 des représentations irréductibles de $SO(m)$. D'autre part, il est clair que dans tous les cas où $n > 1$, les mêmes représentations irréductibles de M_0 apparaissent plusieurs fois dans la plupart des représentations irréductibles de K restreintes à M_0 .

* (H. Boerner, Representations of Groups, North-Holland 1963)

§ 10 LES FONCTIONS SPHERIQUES

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, $G = K A_p N$ une décomposition d'Iwasawa de G , M_O la composante connexe de l'identité du centralisateur de A_p dans K .

Soit δ une représentation irréductible de K , p le nombre de fois où δ apparaît dans une représentation complètement irréductible $g \rightarrow T_g$ de G sur un espace de Banach $\mathcal{H}$.

Le sous-espace $\mathcal{H}(\delta)$ étant de dimension finie, on peut considérer la fonction

$$\phi_\delta(g) = \text{Tr}(E(\delta) T_g)$$

ϕ_δ est appelée fonction sphérique de type δ et de hauteur p .

Le but de ce paragraphe est d'établir, dans ce cas particulier, en suivant la théorie de Godement, une formule intégrale pour les fonctions sphériques, puis de calculer ces dernières dans le cas des groupes $O(n, m)$.

Soit $T = M_O A_p N$; nous avons vu précédemment que T est un sous-groupe fermé de G . D'autre part, toute représentation irréductible de dimension finie $t \rightarrow L(t)$ de T est telle que

$$L(man) = \alpha(a) L(m) \quad \text{où} \quad \alpha \text{ est un caractère de } A_p.$$

Considérons la représentation induite $g \rightarrow T_g^L$, induite par la représentation $t \rightarrow L(t)$ de T .

Rappelons que l'espace $\mathcal{H}^L$ de la représentation induite est l'ensemble des applications continues θ de G sur l'espace vectoriel V de la représentation L . Nous avons montré (voir démonstration du théorème (9;7), que l'espace $\mathcal{H}^L$ pouvait s'identifier à l'espace des applications continues θ de K dans V telles que $\theta(mk) = L(m) \theta(k)$.

Calculons maintenant la fonction $\phi_\delta^L(f) = \int \phi_\delta^L(g) f(g) dg$ quel que soit $f \in L(G)$.

$$T_f^L \theta(k) = \int \theta(kg) f(g) dg = \int \theta(g) f(k^{-1}g) dg$$

Soit $k \rightarrow \dot{k}$ l'application naturelle de K sur K/M_0 ; par la théorie des espaces homogènes, on a, K et M_0 étant compact,

$$\int f(g) dg = \int_{K/M_0} dh \int_T f(th) dt$$

On a tenu compte ici du fait que, comme G et T sont homéomorphes respectivement à $K \times A_p \times N$ et à $M_0 \times A_p \times N$, G/T est homéomorphe à K/M_0 .

Ainsi,

$$T_f^L \theta(k) = \int dh \theta(th) f(k^{-1}th) dt = \int dh \int L(t) \theta(h) f(k^{-1}th) dt$$

Mais, $\int L(t) \theta(h) f(k^{-1}th) dt$ est invariante par l'application $h \rightarrow mh$, c'est-à-dire est constante sur les classes de K modulo M_0 . En effet,

$$\begin{aligned} \int L(t) \theta(mh) f(k^{-1}tmh) dt &= \int L(t) L(m) \theta(h) f(k^{-1}tmh) dt = \\ &= \int L(t) \theta(h) f(k^{-1}th) dt \end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du changement de variable $tm \rightarrow t$. Ainsi,

$$T_f^L \theta(k) = \iint L(t) \theta(h) f(k^{-1}th) dt dh$$

Comme $E(s) = \int_K T_k^L \bar{\chi}_s(k) dk$ on a que,

$$E(s) \theta(k) = \int_K (T_k^L \theta)(k) \bar{\chi}_s(\ell) d\ell = \int \theta(k\ell) \bar{\chi}_s(\ell) d\ell \quad \text{et}$$

$$E(s) T_f^L \theta(k) = \iiint L(t) \theta(h) f(\ell^{-1}k^{-1}th) \bar{\chi}_s(\ell) d\ell dh dt.$$

Tenant compte du fait que $\chi_\delta(\ell^{-1}) = \overline{\chi_\delta(\ell)}$, nous voyons que $E(\delta) T_f^L$ est un opérateur intégral sur $\mathcal{H}^L$ à valeur dans V défini par le noyau

$$K_f^L(k, h) = \iiint f(\ell k^{-1}th) \chi_\delta(\ell) L(t) dt d\ell.$$

Remarquons maintenant que le noyau $K_f^L(k, h)$ est défini non seulement sur $\mathcal{H}^L$ mais également sur l'ensemble $L^V(K)$ de toutes les applications continues de K dans V .

Nous étendrons donc la représentation T_f^L à $L^V(K)$ tout entier.

Considérons maintenant l'opérateur $P(L)$, sur $L^V(K)$, défini par,

$$P(L): \theta(k) \longmapsto \int L(m^{-1}) \theta(mk) dm$$

$$\text{Comme } \theta(mk) = \int L(m^{-1}) \theta(\tilde{m}k) d\tilde{m} = L(\tilde{m}) \int L(m^{-1}) \theta(mk) d\tilde{m}$$

$= L(\tilde{m}) \theta(k)$ on a que $P\theta = \theta$. Ainsi $P(L)$ est une projection de $L^V(K)$ sur $\mathcal{H}^L$.

$$\text{D'autre part } K_f^L(mk, h) = \int f(\ell k^{-1} m^{-1} t h) \chi_\delta(\ell) L(t) d\ell dt =$$

$$L(m) K_f^L(k, h) \quad \text{et} \quad K_f^L(k, mh) = \int f(\ell k^{-1} t m h) \chi_\delta(\ell) L(t) d\ell dt \\ = K_f^L(k, h) L^{-1}(m).$$

Dans cette dernière égalité, on a fait usage du fait que $\det(\text{Ad}_T(m)) = 1$ quel que soit $m \in M_0$.

Nous avons alors, par un calcul simple,

$$P(L) T_f^L = T_f^L P(L) = T_f^L.$$

Ainsi la trace de T_f^L sur $\mathcal{H}^L$ est égale à la trace de T_f^L sur $L^V(K)$.

Par conséquent, si la représentation $g \rightarrow T_g^L$ est irréductible, on a que,

$$\Phi_\delta^L(f) = \text{Tr} \int K_f^L(h, h) dh = \text{Tr} \iiint f(\ell h^{-1} t h) \chi_\delta(\ell) L(t) d\ell dh dt \\ = \iiint f(k t h) \chi_\delta(k h) \text{Tr}(L(t)) dk dh dt$$

Comme nous l'avons vu ci-dessus, dt est invariant par $t \rightarrow tm$, d'où,

$$\Phi_\delta^L(f) = \iiint \int f(k t m h) \chi_\delta(k h) \text{Tr}(L(t) L(m)) dk dh dt dm = \\ \iiint \int f(k t h) \chi_\delta(k m^{-1} h) \text{Tr}(L(t) L(m)) dk dh dt dm = \\ \iiint \int f(k t h) \chi_\delta(m^{-1} h k) \text{Tr}(L(t) L(m)) dk dm dt dh = \\ \iiint \int f(k t h) \chi_\delta(m h k) \text{Tr}(L(t) L^{-1}(m)) dk dh dt dm.$$

Définissons maintenant l'application $\chi_\delta^L(g)$ de G dans C par

$$\chi_\delta^L(th) = \int \chi_\delta(mh) \operatorname{Tr}(L(t) L^{-1}(m)) dm$$

Bien que la décomposition $g = th$ ne soit pas unique, il est clair (intégration sur la classe de K modulo M_0) que l'application χ_δ^L ne dépend que de th ; d'où nous avons :

$$\begin{aligned} \phi_\delta^L(f) &= \iiint f(kth) \chi_\delta^L(thk) dt dk dh \\ &= \iint f(kg) \chi_\delta^L(gk) dg dk \quad \text{d'où} \\ \phi_\delta^L(f) &= \int f(g) dg \int \chi_\delta^L(kgk') dk \quad \text{et comme} \quad \phi_\delta^L(f) = \int \phi_\delta^L(g) f(g) dg \end{aligned}$$

on en conclut que :

$$\phi_\delta^L(g) = \int \chi_\delta^L(kgk') dk.$$

Cas particulier.

Si δ est la représentation triviale de K et si $L(m) = 1$ pour tout $m \in M_0$, alors, en désignant par α un caractère unitaire de A_p , on a que :

$$\phi_i^\alpha(g) = \int L(t_k g k') dk = \int \alpha(a(kgk')) dk = \int \alpha(a(gk')) dk$$

où $t(kgk^{-1})$ et $a(kgk^{-1})$ sont les éléments qui apparaissent dans la décomposition d'Iwasawa de $kgk^{-1} = \tilde{k}an$ et dans celle de kgk^{-1} en $k'\tilde{t}$.
 $k, k' \in K$ et $\tilde{t} \in T$.

Posant $H = \log a$, on a finalement

$$\phi_i^\alpha(g) = \int_K e^{v(H(gk'))} dk$$

où v est défini par l'équation $\alpha(e^H) = e^{v(H)}$.

Remarque : Dans ce cas particulier $\bar{\chi}_\delta * f * \bar{\chi}_\delta(x) = \iint f(kxk') dk dk'$; ainsi l'algèbre $L(\delta)$ est, dans ce cas, l'algèbre des fonctions bi-invariantes sous K . Nous la désignerons par $L(\delta_0)$.

§ 11 DETERMINATION DE $\phi_1^\alpha(g)$ DANS LE CAS DE $(SO(n,m))_e$.

Lemme (11;1)

Tout élément de $(SO(n,m))_e$ se met sous la forme $g = kak'$ où k et $k' \in K$ et $a \in A_p$.

Dém. Décrivons schématiquement g sous forme de matrice "blocs".

$$g = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}_n$$

Soient alors $k = \begin{vmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{vmatrix}_n$ et $k' = \begin{vmatrix} k'_1 & 0 \\ 0 & k'_2 \end{vmatrix}_n$ deux éléments de K ; nous avons alors que :

$$kgk' = \begin{vmatrix} k_1 A k'_1 & k_1 B k'_2 \\ k_2 C k'_1 & k_2 D k'_2 \end{vmatrix}_n$$

Définissons les coefficients des matrices k_1, k_2, k'_1 et k'_2 par les relations suivantes :

- 1.- $\sum_{k,s} (k_1)_k^i A_s^k (k'_1)_1^s = 0 \quad i = 2, 3, \dots, n$
- 2.- $\sum_{k,s} (k_1)_k^1 A_s^k (k'_1)_j^s = 0 \quad j = 2, 3, \dots, n$
- 3.- $\sum_{k,s} (k_1)_k^1 B_s^k (k'_2)_j^s = 0 \quad j = 2, 3, \dots, m$
- 4.- $\sum_{k,s} (k_2)_k^i C_s^k (k'_1)_1^s = 0 \quad i = 2, 3, \dots, m$

Les autres éléments sont définis par orthogonalité des lignes et des colonnes (le choix n'est pas unique !).

kgk' est alors une matrice de la forme suivante :

$$\tilde{g} = kgk' = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{A} & & & \tilde{B} & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & d_1 & d_2 & \dots & d_m \\ 0 & & & & e_2 & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \tilde{C} & & & \tilde{D} & & & \\ & & & & e_m & & & \end{vmatrix}$$

Choisissons finalement les composantes des vecteurs

$$((k_1)_1^1, \dots, (k_1)_n^1), \quad ((k'_1)_1^1, \dots, (k'_1)_n^1), \quad ((k'_2)_1^1, \dots, (k'_2)_1^m), \\ ((k_2)_1^1, \dots, (k_2)_m^1), \text{ de manière à ce que } a, b, c, d, \text{ soient positifs.}$$

Faisant usage de la pseudo-orthogonalité du groupe, nous avons maintenant $-a^2 + c_1^2 = -1$, $-a^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2 = -1$, $ab_1 = c_1 d_1$, $ac_1 = b_1 d_1$, d'où nous tirons que $b_1^2 = c_1^2$ et $a^2 = d_1^2$ et finalement $b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$.

Des calculs semblables montrent que $e_2 = e_3 = \dots = e_m = 0$, $c_2 = \dots = c_m = 0$ et $d_2 = d_3 = \dots = d_m = 0$.

Comme $a^2 = 1 + c_1^2$, nous posons $a = \text{cht}_1$. Nous avons alors :

$$\tilde{g} = \begin{vmatrix} \text{cht}_1, & 0 & \dots & 0 & \text{sh}_1, & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \tilde{A} & 0 & & & \tilde{B} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ \text{sh}_1, & 0, & \dots & 0 & \text{cht}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & & & \tilde{C} & 0 & & & \tilde{D} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \end{vmatrix}$$

Démontrons maintenant le résultat par récurrence sur n (m étant quelconque).

Si $n = 1$ nous avons :

$$\tilde{g} = \begin{vmatrix} \text{cht}_1 & \text{sh}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \text{sh}_1 & \text{cht}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \tilde{D} \end{vmatrix}$$

Mais $\tilde{D}$ est isomorphe à un élément de K , d'où le résultat.

Supposons maintenant le résultat vrai pour $n-1$.

$$\text{Soit } f = \begin{vmatrix} 1 & 0, & \dots & 0, & 0, & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \tilde{A} & 0 & & & \tilde{B} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0, & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & & & \tilde{C} & 0 & & & \tilde{D} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \end{vmatrix} \quad f \text{ est, à isomorphie près, un} \\ \text{élément de } SO(n-1; m-1).$$

Par hypothèse d'induction nous pouvons mettre f sous la forme

$$f = h \bar{a} h = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & & h_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ch_1 & 0 & \dots & 0 & sh_1 \\ 0 & 0 & ch_2 & & 0 & sh_2 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & sh_1 & & & 0 & ch_1 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h'_1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & & h'_2 \end{vmatrix}$$

où h_1 et $h'_1 \in SO(n-1)$ et h_2 et $h'_2 \in SO(m-1)$.

Posons $\tilde{a} = \begin{vmatrix} ch_1 & & & sh_1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ sh_1 & & & 1 & ch_1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix}$

alors, $\tilde{g} = h \bar{a} h = h \tilde{a} h'$ d'où $g = {}^t k h \tilde{a} h' {}^t k'$.

Remarque (11;2). La décomposition de g donnée par le lemme ci-dessus n'est évidemment pas unique. En effet, si kak' et hah' sont deux décompositions de g nous avons que :

$$a = {}^t k h a' h' {}^t k'.$$

Prenant le transposé de cette équation, nous avons, après multiplication que :

$$a^2 = {}^t k h (a')^2 {}^t ({}^t k h).$$

Ainsi ${}^t k h$ est un élément du normalisateur de A_p . Il en est de même pour $h' {}^t k'$.

Lemme (11;3)

Tout élément de K peut se mettre sous la forme $k = m k' m'$, où $m, m' \in M$ et k' est un élément d'un groupe isomorphe à $SO(n) \times SO(2n)$.

Notre but étant de déterminer $H(ak)$, nous posons $a\tilde{k} = k\tilde{a}$ (décomposition d'Iwasawa dans $SO(n, n+1)$). Effectuant alors le produit de cette équation par l'équation transposée, nous obtenons

$${}^t\tilde{k} a^2\tilde{k} = {}^t_n \hat{a}^2_n$$

Afin d'avoir cette équation sous une forme mieux adaptée à notre problème, nous effectuons un changement de base défini par la matrice

$$S = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & & & 1/\sqrt{2} & & & 1/\sqrt{2}, 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & 1/\sqrt{2} & & & & \\ -1/\sqrt{2} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1/\sqrt{2} & & & & \\ & & & & 1/\sqrt{2} & & \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Nous avons alors que :

$$S \tilde{a} {}^t S = \begin{vmatrix} e^{\tilde{t}_1} & & & 0 \\ & e^{\tilde{t}_2} & & \\ & & e^{-\tilde{t}_1} & \\ 0 & & & e^{-\tilde{t}_n} & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

De plus, si $n_p \in N_p$,

$$\begin{array}{c|c|c|c} & p & n & p+n & 2n \\ \hline 1 & 1 & & & \\ \hline 0 & -(\xi_{p+1}^p + \xi_{p+n+1}^p) \dots (-\xi_n^p \xi_{1n}^p), 0, \dots, 0, -\Delta^p, (\xi_{p+1}^p + \xi_{p+n+1}^p) \dots (\xi_n^p + \xi_{1n}^p), \frac{2}{\sqrt{2}} \xi_{2n+1}^p \\ & & & & -(\xi_{p+1}^p + \xi_{p+n+1}^p) \\ \hline & & & & -(\xi_n^p + \xi_{1n}^p) \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ \hline 2n & & & & (\xi_{p+1}^p + \xi_{p+n+1}^p) \\ & & & & \vdots \\ & & & & (\xi_n^p + \xi_{1n}^p) \\ & & & & \frac{2}{\sqrt{2}} \xi_{2n+1}^p \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \end{array}$$

Ainsi, après transformation par S , les éléments de N seront de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & n_1^1 & \dots & n_n^1 & \dots & n_{2n+1}^1 \\ & 1 & n_3^2 & \dots & \dots & n_{2n+1}^2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \vdots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \quad n$$

et par conséquent $s^t n \tilde{a}^{2t} s$ prend la forme,

$$\begin{vmatrix} e^{\tilde{t}_1} & & & & & \\ a_2^1 & e^{\tilde{t}_2} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ a_n^1 & & & e^{\tilde{t}_n} & & \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \quad n \quad n \quad \begin{vmatrix} e^{\tilde{t}_1} & a_2^1 & \dots & \dots & \dots & \\ & e^{\tilde{t}_2} & a_3^2 & \dots & \dots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & e^{\tilde{t}_n} & & \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \quad n$$

où les a_j^i sont des produits du type $n_j^i e^{\tilde{t}_i}$.

Nous remarquerons maintenant que, pour $i \leq n$, les coefficients des i premières lignes et colonnes de la matrice produit sont déterminés par le produit des matrices ci-dessus, restreintes à leur i premières lignes et colonnes. Ainsi le déterminant de la matrice produit restreinte à ses i premières lignes et colonnes est égale au produit des déterminants des deux matrices ci-dessus restreintes à leur i premières lignes et colonnes.

Désignons maintenant par δ_i le déterminant de la matrice $s^t k a k^t s$, restreinte à ses i premières lignes et colonnes.

Nous obtenons alors :

$$e^{z\tilde{t}_1} = \delta_1, \quad e^{z\tilde{t}_2} = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad \dots \quad e^{z\tilde{t}_n} = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$$

Soient $v_1, \dots, v_n$ les composantes de la forme linéaire v sur h_{p_0} , alors,

$$e^{v_1 \tilde{t}_1 + v_2 \tilde{t}_2 + \dots + v_n \tilde{t}_n} = \delta_1^{\frac{v_1 - v_2}{2}} \delta_2^{\frac{v_2 - v_3}{2}} \dots \delta_n^{\frac{v_n}{2}}$$

et

$$\Phi_1^{a(v)}(g) = \int_K \delta_1^{\frac{v_1 - v_2}{2}} \delta_2^{\frac{v_2 - v_3}{2}} \dots \delta_n^{\frac{v_n}{2}} dk.$$

Afin de donner une forme plus explicite au δ_{ij} , nous déterminons la matrice $L = s^t \tilde{k} a^2 \tilde{k}^t s$. Comme $\tilde{k}$ se met sous la forme,

$$\tilde{k} = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \\ a_1^{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1}^{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}$$

Nous obtenons, après quelques calculs, les n premières colonnes de la matrice $s^t \tilde{k} a^2 \tilde{k}^t s$ sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2} e^t {}_1(b_1^1 + a_1^1), \dots, \frac{1}{2} e^t {}_1(b_n^1 + a_n^1) \\ \frac{1}{2} e^t {}_2(b_1^2 + a_1^2), \dots, \frac{1}{2} e^t {}_2(b_n^2 + a_n^2) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} e^t {}_n(b_1^n + a_1^n), \dots, \frac{1}{2} e^t {}_n(b_n^n + a_n^n) \\ \frac{1}{2} e^{-t} {}_1(-b_1^1 + a_1^1), \dots, \frac{1}{2} e^{-t} {}_1(-b_n^1 + a_n^1) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} e^{-t} {}_n(-b_1^n + a_1^n), \dots, \frac{1}{2} e^{-t} {}_n(-b_n^n + a_n^n) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} a_1^{n+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} a_{n+1}^{n+1} \end{array}$$

Tenant compte maintenant du fait que,

$$\sum_{k=1}^n a_i^k a_j^k = \delta_{ij} - a_i^{n+1} a_j^{n+1} \quad \text{et que} \quad \sum_{k=1}^n b_i^k b_j^k = \delta_{ij}$$

nous avons que,

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n e^{2t_k} (b_i^k + a_i^k)(b_j^k + a_j^k) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n e^{-2t_k} (-b_i^k + a_i^k)(-b_j^k + a_j^k) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_i^k b_j^k - \sum_{k=1}^n a_i^k a_j^k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} e^{t_k} (b_i^k + a_i^k) - \frac{1}{2} e^{-t_k} (-b_i^k + a_i^k) \right) \left(\frac{1}{2} e^{t_k} (b_j^k + a_j^k) - \frac{1}{2} e^{-t_k} (-b_j^k + a_j^k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (b_i^k \operatorname{ch} t_k + a_i^k \operatorname{sh} t_k) (b_j^k \operatorname{ch} t_k + a_j^k \operatorname{sh} t_k) \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons que,

$$\delta_j = \begin{vmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \dots & L_{1,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{j,1} & \dots & \dots & L_{j,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\vec{V}_1, \vec{V}_1) & (\vec{V}_1, \vec{V}_2) & \dots & (\vec{V}_1, \vec{V}_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\vec{V}_j, \vec{V}_1) & \dots & \dots & (\vec{V}_j, \vec{V}_j) \end{vmatrix}$$

où $\vec{V}_i$ est un vecteur de composantes $V_i^k = b_i^k \text{cht}_k + a_i^k \text{sht}_k$

pour $k = 1, 2, \dots, n$ et où $(\vec{V}_i, \vec{V}_j) = \sum_{k=1}^n V_i^k V_j^k$.

Comme δ_j est maintenant écrit sous forme de déterminant de Gram, nous posons

$$X_j \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, j \\ r_1, r_2, \dots, r_j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} V_1^{r_1} & V_1^{r_2} & \dots & V_1^{r_j} \\ V_2^{r_1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_j^{r_1} & \dots & \dots & V_j^{r_j} \end{vmatrix}$$

où $r_1, r_2, \dots, r_n$ peuvent prendre n'importe quelle valeur entre 1 et n.

Nous obtenons, en faisant usage de la théorie des déterminants de Gram,

$$\delta_j = \sum_{r_1 < r_2 < \dots < r_j} \left(X_j \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, j \\ r_1, r_2, \dots, r_j \end{pmatrix} \right)^2$$

Ainsi tenant compte du théorème (11;7), nous avons :

(11;9)

$$\Phi_{(v)}^{(v)}(q) = \int_K \left\{ \left[\sum_n (X_n(r_1)) \right]^{\frac{v_1 - v_n}{2}} \left[\sum_{r_1 < r_2} (X_2(r_1, r_2)) \right]^{\frac{v_2 - v_3}{2}} \dots \left[\sum_{r_1 < r_2 < \dots < r_n} (X_n(r_1, 2, \dots, n)) \right]^{\frac{v_n - v_{n+1}}{2}} \right\}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^k \sin^{f-1} \varphi_{j,j}^k \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^k \left(\sin \theta_{m-n-j}^{m-n+k} \right)^{m-n-j-1} d\varphi_{j,j}^k d\theta_{m-n-j}^{m-n+k}$$

§ 12 FONCTIONS SPHERIQUES DE TYPE POSITIF ET REPRESENTATIONS.

Définition (12;1).- Une fonction ϕ sur un groupe topologique G , à valeur dans le corps des complexes est dite de type positif si

$$\sum_{i,j} \phi(x_i^{-1} x_j) \alpha_i \bar{\alpha}_j \geq 0$$

Pour tous les ensembles finis $X_1, \dots, X_n$ d'éléments de G et pour tout ensemble de nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Soit π une représentation unitaire d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors, si $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire, la fonction

$x \rightarrow \langle e, \pi(x) e \rangle$ est de type positif quel que soit $e \in \mathcal{H}$.

En effet,

$$\sum_{i,j} \langle e, \pi(x_i^{-1} x_j) e \rangle \alpha_i \bar{\alpha}_j = \langle \sum_i \alpha_i \pi(x_i) e, \sum_j \alpha_j \pi(x_j) e \rangle$$

Supposons que G soit un groupe de Lie semi-simple connexe et de centre fini, possédant une décomposition d'Iwasawa $G = K A_p N$. Notons d'autre part $xu = u_x h(x,u) n(x,u)$, la décomposition d'Iwasawa de xu , où u et $u_x \in K$, $x \in G$, $h(x,u) \in A_p$ et $n(x,u) \in N$.

Lemme (12;2)

Si $x, y \in G$ alors $u_{yx} = (u_x)_y$ et $H(yx, u) = H(y, u_x) + H(x, u)$, où $H(x, u) = \log h(x, u)$.

Dém. $xyu = yu_x h(x, u) n(x, u) = (u_x)_y h(y, u_x) n(y, u_x) h(x, u) n(x, u) = (u_x)_y h(y, u_x) h(x, u) n'(y, u_x) n(x, u) = u_{yx} h(yx, u) n(yx, u)$ où $n'(y, u_x) = h^{-1}(x, u) n(y, u_x) h(x, u) \in N$, puisque N est le sous-groupe des commutateurs de $A_p N$.

Définissons maintenant, avec Harish-Chandra une série de représentations de G sur $L^2(K)$.

Soient v , une forme linéaire sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{P}_0}$, (à valeur complexe), ρ , la demi-somme des racines positives, $v' = v + 2\rho$; définissons alors l'application π_v par,

$$(\pi_v(x)f)(u) = e^{-v'(H(x^{-1}u))} f(u_{x^{-1}}) \quad f \in L^2(K)$$

Montrons que π_v est une représentation.

1) Par le lemme ci-dessus nous avons que :

$$\begin{aligned} \pi_v(y) (\pi_v(x)f)(u) &= e^{-v'(H(y^{-1}u))} (\pi_v(x)f)(u_{y^{-1}}) = \\ &= e^{-v'(H(y^{-1}u))} e^{-v'(H(x^{-1}u_{y^{-1}}))} f((u_{y^{-1}})_{x^{-1}}) = \\ &= e^{-v'(H(xy)^{-1}u)} f(u_{(xy)^{-1}}). \end{aligned}$$

2) Si $y = uhn$, alors $xy = xuhn = u_x h(x,u) n(x,u) h n = u_x h(x,u) h h^{-1} n(x,u) h n = u_x h(x,u) h n'$ où $n' = h^{-1}n(x,u) h n \in N$.

Ainsi pour x fixé nous avons que :

$e^{2\rho(\log h)} du dh dn = dy = d(xy) = e^{2\rho(\log h(x,u)h)} du_x dh dn$ pour x, a, h fixé.

Ainsi $du = e^{2\rho(H(x,u))} du_x$

Posons $g(u) = e^{-v'(H(x^{-1}u))} f(u_{x^{-1}})$. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \int_K |g(u)|^2 du &= \int_K |g(u_x)|^2 du_x = \int_K |g(u_x) e^{-s(H(x,u))^2}|^2 du \\ &= \int_K |f(u) e^{(v+s)(H(x,u))}|^2 du. \end{aligned}$$

Comme $|e^{(v+\rho)(H(x,u))}|$ est continue, elle est bornée sur K .

Soit M_x la borne de cette fonction au point x . Alors,

$$\int_K |g(u)|^2 du \leq M_x^2 \int_K |f(u)|^2 du < \infty$$

π_v est donc un opérateur borné, et on montre alors facilement que π_v est continu.

Comme par ce qui précède,

$$\int_K |(\pi_v(x)f)(u)|^2 du = \int_K |e^{(v+s)(H(x,u))} f(u)|^2 du.$$

nous remarquons que la représentation sera unitaire si $v + \rho$ prend des valeurs purement imaginaires.

D'autre part, si ψ_0 désigne la fonction caractéristique du compact K , et si π_v est unitaire, nous avons que :

$$\langle \psi_0, \pi_v(x) \psi_0 \rangle = \overline{\langle \psi_0, \pi_v(x^{-1}) \psi_0 \rangle} = \int_K e^{-v'(H(x,u))} du.$$

où $v' - \rho = v + \rho$ est imaginaire pure, c'est-à-dire $\text{Re}(v') = \rho$ et, en posant $v' - \rho = -i\lambda$, (λ étant réel)

$$\phi_{-v'}(x) = \langle \psi_0, \pi_v(x) \psi_0 \rangle = \int_K e^{(i\lambda - s)(H(x,u))} du.$$

Nous désignerons désormais par ϕ_λ la fonction sphérique de type positif $\phi_{-v'}$.

Rappelons que si $s \in W$ (groupe de Weyl), $\phi_{s\lambda} = \phi_\lambda$, où $\phi_{s\lambda}(x) = \phi_{s\lambda}(\exp H)$ = $\phi_\lambda(\exp sH)$ avec $x = k \exp H n$.

Il suffira donc de se restreindre au λ d'une chambre de Weyl, c'est-à-dire aux formes linéaires sur $\mathfrak{h}_{p_0}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_+$. Il n'est pas possible de dire si nous avons, par ce procédé, obtenu toutes les fonctions sphériques de type positif. Nous allons voir néanmoins que l'ensemble ainsi défini est suffisant pour établir la mesure de Plancherel des fonctions sphériques de type positif.

§ 13 MESURE DE PLANCHEREL

Soient G , un groupe connexe, semi-simple, de centre fini, K un sous-groupe compact maximal de G , Λ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{h}_{p_0}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $(\lambda, \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_+$ (ensemble des racines positives relativement à $\mathfrak{h}_{p_0}$).

Définissons alors, pour tout élément $f \in L(\delta)$, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f par :

$$(13;1) \quad \hat{f}(\lambda) = \int_G f(g) \phi_\lambda(g^{-1}) dg$$

où $\phi_\lambda(g)$ est la fonction sphérique associée à λ .

On définit sur Λ la topologie la moins fine pour laquelle les transformées de Fourier sont continues. Ainsi Λ devient un espace localement compact. Il existe de plus sur cet espace une mesure positive $dm(\lambda)$, dite mesure de Plancherel, telle qu'on ait la relation,

$$(13;2) \quad \int_G |f(g)|^2 dg = \int_\Lambda |\hat{f}(\lambda)|^2 dm(\lambda).$$

Finalement l'application $f \rightarrow \hat{f}$ s'étend à un isomorphisme de l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur G , bi-invariantes sous K , sur $L^2(\Lambda)$.

Harish-Chandra a donné une forme explicite à $dm(\lambda)$ dans le cas où h_{p_0} est de dimension 1, c'est-à-dire lorsque l'espace symétrique $\epsilon = G/K$ est de rang 1. Le cas général a été explicité par S.G. Gindikin et F.I. Karpelevic*.

Le résultat obtenu par ces auteurs est le suivant :

Soient P_α la multiplicité de la racine α (relativement à h_{p_0}),

B , la fonction Eulerienne Beta

$$\text{Posons} \quad I(\epsilon, \lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} B\left(\frac{P_\alpha}{2}, \frac{P_\alpha}{4} + \frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\right)$$

alors la mesure de Plancherel peut se mettre sous la forme,

$$(13;3) \quad dm(\lambda) = |C(\epsilon, \lambda)|^{-2} d\lambda$$

avec $C(\epsilon, \lambda) = I(\epsilon, i\lambda) / I(\epsilon, \rho)$

(ρ est comme "toujours" la demi-somme des racines positives.)

* S.G. Gindikin et F.I. Karpelevic, Plancherel measure of Riemannian symmetric Spaces of non-positive curvature. Doklady Akad. Nauk SSSR 145 (1962), 252-255.

Déterminons maintenant $\dim(\lambda)$ dans le cas de $(SO(m,n))_e$.

Soit $g_\lambda = \{x \in so(n,m) : [H, x] = \lambda(H)x \quad \forall H \in h_{p_0}\}$

Si $g_\lambda \neq 0$ alors λ est une racine de $so(n,m)$ relativement à h_{p_0} . Avec les notations du paragraphe 4, nous voyons que, si $\alpha > 0$ nous avons deux types de sous-espaces propres.

1) $\alpha = \lambda_i \pm \lambda_j \quad i, j \leq n$ et les espaces propres correspondants sont de la forme,

$$R \quad X_{\lambda_i \pm \lambda_j}$$

2) $\alpha = \alpha_j \quad i=1,2,\dots,n$; les sous-espaces propres correspondants sont engendrés par des éléments du type $e_{j,i} - e_{j,i+n} \quad j > 2n$. La dimension de tous ces sous-espaces est évidemment égale à $m-n$.

Remarquons qu'aucune racine n'est obtenue comme multiple d'une autre.

Rappelons que,

$$\frac{\Gamma(n+z) \Gamma(n-z)}{\Gamma^2(n)} = \frac{\pi z}{\sin \pi z} (1 - z^2/m^2), \quad \Gamma(iv) \Gamma(-iv) = \frac{\pi}{v \sinh \pi v}$$

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+z) \Gamma(n+\frac{1}{2}-z)}{\Gamma^2(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\cos \pi z} \prod_{m=1}^n (1 - 4z^2/(2m-1)^2)$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}+iv) \Gamma(\frac{1}{2}-iv) = \frac{\pi}{\cosh \pi v}$$

Nous distinguons maintenant deux cas.

1) $\frac{m-n}{2} = p$ entier.

Posant $v_j = (\lambda_j, v)$, nous pouvons écrire,

$$|I(iv)|^2 = \prod_{k=1}^n \mathcal{B}(p, iv_k) \mathcal{B}(p, -iv_k) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j>k} \mathcal{B}(\frac{1}{2}, i(v_k+v_j)/2) \right.$$

$$\left. \mathcal{B}(\frac{1}{2}, i(v_k+v_j)/2) \mathcal{B}(\frac{1}{2}, i(v_k-v_j)/2) \mathcal{B}(\frac{1}{2}, -i(v_k-v_j)/2) = \right.$$

$$\prod_{k=1}^n \left\{ \left(v_k^2 \prod_{m=1}^p \left(1 + \frac{v_k^2}{m^2} \right) \right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j>k} \left(\frac{4\pi^2}{v_k^2 - v_j^2} \cosh\left(\frac{v_k+v_j}{2}\right) \cosh\left(\frac{v_k-v_j}{2}\right) \right) \right) \right\}$$

Comme $(s, \lambda_j) = \sum_{k=1}^n ((m+n)/2 - k) \lambda_k(H_j) = \frac{m+n}{2} - j$, nous avons,

$$\begin{aligned} I(s) &= \prod_{k=1}^n B((m+n)/2, (m+n)/2 - k) \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j>k}^n B(\frac{1}{2}, m+n - (k+j)/2) B(\frac{1}{2}, (j-k)/2) \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(p) \Gamma(p+n-k)}{\Gamma(m-k)} \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j>k}^n \frac{\Gamma(m+n - \frac{k+j}{2}) \Gamma(\frac{j-k}{2})}{\Gamma(m+n - \frac{k+j-1}{2}) \Gamma(\frac{j-k+1}{2})} \end{aligned}$$

d'où

$$(13;4) \quad dm(\lambda) = \text{cst} \prod_{k=1}^n v_k^2 \prod_{m=1}^{\frac{m-n}{2}} (1 + \frac{v_k^2}{v_m^2}) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j>k}^n \frac{\text{ch}(\frac{v_k+v_j}{2}) \text{ch}(\frac{v_k-v_j}{2})}{v_k^2 - v_j^2} \right)$$

$$2) \quad \frac{m-n}{2} = p + \frac{1}{2} \quad p \text{ entier.}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } B(p+\frac{1}{2}, iv_k) B(p+\frac{1}{2}, -iv_k) &= \frac{\Gamma^2(p+\frac{1}{2}) \Gamma(iv_k) \Gamma(-iv_k)}{\Gamma(p+\frac{1}{2}+iv_k) \Gamma(p+\frac{1}{2}-iv_k)} \\ &= \frac{\pi}{v_k \text{sh} \pi v_k} \prod_{m=1}^p \left[1 + \frac{4v_k^2}{(2m-1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$(13;5) \quad dm(\lambda) = \text{cst} \prod_{k=1}^m \text{Th}(\pi v_k) \prod_{m=1}^p (1 + \frac{4v_k^2}{(2m-1)^2}) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j>k}^n \frac{\text{ch}(\frac{v_j+v_k}{2}) \text{ch}(\frac{v_k-v_j}{2})}{v_k^2 - v_j^2} \right)$$

Remarque : Il n'est pas possible, dans l'état actuel du développement de la théorie générale, de dire quelque chose d'exhaustif concernant la transformation de Fourier inverse. On a néanmoins le résultat suivant.

Soient $\varepsilon(G)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur G , $\mathcal{A}_0(h_{p_0})$ les fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide (au sens de Schwartz), $I(G)$ un sous-ensemble de $\varepsilon(G)$ ayant les deux propriétés suivantes:

- 1) f est bi-invariante sous K .
- 2) Pour tout opérateur différentiel D sur G , invariant à gauche, et pour tout entier $q \geq 0$,

$$\text{Sup } |\omega_q(x) (Df)(x)| < \infty$$

où $\omega_q(x) = \omega(X)(1+|X|^q)$ si $x = k \exp X$ $k \in K$ et $X \in \mathfrak{h}_{p_0}$

nous avons alors que si $f \in I(G)$,

$$1) \hat{f} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{h}_{p_0}}$$

$$2) f(x) = \int_{\Lambda} \hat{f}(\lambda) \phi_{\lambda}(x) |C(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

§ 14 REPRESENTATIONS DE CLASSE 1.

Nous avons défini au § 12 un ensemble de représentations dans $L^2(K)$. Nous allons étudier maintenant de plus près ces représentations afin d'obtenir une partie des représentations de classe 1.

Décomposition de $L^2(K)$ en sous-espaces invariants.

Soit $k \rightarrow V_k$ la représentation régulière droite de K dans $L^2(K)$. Nous avons que,

$$(V_k \phi)(q) = \phi(qk) \quad \phi \in L^2(K) \quad q \text{ et } k \in K$$

Pour $m \in M$ nous avons de plus que,

$$(\pi_V(x) V_m) \phi(q) = \pi_V(x) \phi(qm) = \exp v(H(x^{-1}qm)) \phi((qm)_{x^{-1}})$$

$$\text{d'autre part, } (V_m \pi_V(x)) \phi(q) = V_m \exp v(H(x^{-1}q)) \phi(q_{x^{-1}}) = \\ \exp v(H(x^{-1}q m)) \phi((qx^{-1})_m).$$

Comme $(q_{x^{-1}})_m = (qm)_{x^{-1}}$, on a que,

$$\pi_V(x) V_m = V_m \pi_V(x) \quad \forall m \in M \text{ et } \forall x \in G$$

Soit $m \rightarrow (f_{i,j}(m))$ une représentation unitaire irréductible de M de dimension d et de caractère normalisé η ; alors les opérateurs

$$Q^2 = \int_M \overline{\eta(m)} V_m dm \quad \text{et} \quad Q^2_{i,j} = d \int_M f_{i,j}(m^{-1}) V_m dm$$

sont permutables aux $\pi_V(x)$.

Nous avons alors les propriétés suivantes :

$$1) \quad Q^\eta Q^{\eta'} = \int_M \overline{\eta * \eta'}(m) V_m dm = \delta_{\eta, \eta'} Q^\eta$$

$$\text{D'autre part} \quad \langle Q\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, Q\varphi \rangle \quad \forall \psi, \varphi \in L^2(K)$$

Q^η est donc un projecteur orthogonal.

2) On démontre de même que $Q_{i,j}^\eta$ est un projecteur orthogonal dans $L^2(K)$.
Définissons $\mathcal{H}^\eta = Q^\eta \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_i^\eta = Q_{i,i}^\eta \mathcal{H}$; alors,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\eta \in \hat{M}} \mathcal{H}^\eta \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^\eta = \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{H}_i^\eta$$

($\hat{M}$ est l'ensemble des caractères de M .)

En effet, les Q^η définissent les sous-espaces de $L^2(K)$ correspondant à la décomposition de V_m en ensemble de représentations irréductibles équivalentes. De plus,

$$\bigoplus_{i=1}^d \mathcal{H}_i^\eta = \bigoplus_{i=1}^d Q_{i,i}^\eta \mathcal{H} = Q^\eta \mathcal{H} = \mathcal{H}^\eta$$

3) Montrons que $Q_{i,j}^\eta$ est un opérateur partiellement isométrique tel que

$$Q_{i,j}^\eta : \mathcal{H}_i^\eta \rightarrow \mathcal{H}_j^\eta$$

En effet, un simple calcul montre que,

$$Q_{i,j}^\eta Q_{k,k}^\eta = \delta_{i,k} Q_{i,j}^\eta \quad \text{et} \quad Q_{i,i}^\eta Q_{j,j}^\eta = \delta_{i,j} Q_{i,j}^\eta$$

d'où $Q_{i,j}^\eta$ envoie $\mathcal{H}_i^\eta$ dans $\mathcal{H}_j^\eta$.

De plus,

$$\begin{aligned} &= \langle Q_{i,j}^\eta \varphi, Q_{i,j}^\eta \varphi \rangle = d^2 \iint_{M \times M} f_{i,j}(m^{-1}) V_m \varphi \overline{f_{i,j}(m'^{-1}) V_{m'} \varphi} dm dm' \\ &= d^2 \iint f_{i,j}(m^{-1}) f_{i,j}(m'^{-1}) \langle \varphi, V_{m'^{-1}m} \varphi \rangle dm dm' = \\ &= d^2 \sum_k \iint f_{i,j}(m) f_{i,j}(m'^{-1}) \overline{f_{i,j}(m'^{-1})} \langle \varphi, V_m \varphi \rangle dm dm' \\ &= d \int f_{i,i}(m) \langle \varphi, V_m \varphi \rangle dm = \langle \varphi, Q_{i,i}^\eta \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_i^\eta \end{aligned}$$

Proposition

Les sous-espaces fermés $\mathcal{H}_i^\eta$ sont invariants par les opérateurs $\pi_\nu(x)$ et si l'on désigne par $\pi_\nu^{\eta,i}(x)$ la représentation de G dans $\mathcal{H}_i^\eta$, obtenue par restriction de π_ν à $\mathcal{H}_i^\eta$ ($1 \leq i \leq d$), ces d représentations sont deux à deux équivalentes.

Dém. Immédiate car les projecteurs permutent aux $\pi_v(x)$. L'équivalence vient de ce que $Q_{i,j}^\eta$ transforme $\pi_v^{\eta,i}$ en $\pi_v^{\eta,j}$.

Il s'agit de voir maintenant dans quel cas $\pi_v^{\eta,i}$ est une représentation unitaire irréductible.

Critère de Bruhat.

Soit $f \in \mathcal{H}_i^\eta$,

$$(\pi_v^{\eta,i}(g)f)(k) = e^{-v'(H(g^{-1}k))} Q_{f,i}^\eta f(k_g)$$

où $v' = v + 2\rho$. Posons $k_g^{-1} = \tilde{k} m$

$$(\pi_v^{\eta,i}(g)f)(k) = \sum_j f_{i,j}(m) Q_{f,i}^\eta f(\tilde{k}) e^{-v'(H(g^{-1}k))}$$

Cette dernière relation nous montre que $\pi_v^{\eta,i}$ est la représentation de G dans $\mathcal{H}_i^\eta$, induite par la représentation

$$man = t \longrightarrow e^{-v(H(an))} L_m$$

de $M_O A_P N$, où L_m est une représentation irréductible de M_O (représenté par la matrice $f_{i,j}$).

Afin de voir maintenant que la presque totalité des représentations $\pi_v^{\eta,i}$ sont irréductibles, lorsque $v(H)$ est imaginaire pure, c'est-à-dire lorsque $\pi_v^{\eta,i}$ est unitaire, rappelons le critère de Bruhat.

Soit L une représentation unitaire irréductible de dimension finie de $T = M_O A_P N$. Faisons correspondre aux éléments du groupe de Weyl W un système de représentants dans M' (normalisateur de A_P dans K). Alors, si X_s est l'élément de M' associé à $s \in W$, définissons la représentation ${}^s L$ par,

$${}^s L_g = L_{X_s^{-1} g X_s}$$

Nous avons alors le théorème suivant, dit critère de Bruhat.

Théorème

1) Soit L une représentation unitaire irréductible de dimension finie de $T = M_0 A_p N$. Si, pour tout élément $s \neq e$ du groupe de Weyl W de G , les représentations L et ${}^s L$ de $M_0 A_p$ ne sont pas équivalentes, alors la représentation unitaire induite U^L est irréductible.

2) Soient L^1 et L^2 deux représentations irréductibles de dimension finie de T : Les représentations unitaires induites U^{L^1} et U^{L^2} sont équivalentes si et seulement si il existe un $s \in W$ tel que les représentations L^1 et L^2 de $M_0 A_p$ sont équivalentes.

Le calcul du groupe de Weyl de $SO(n, m)$ montre que le critère jouera essentiellement sur A_p . (Les représentations de M_0 étant presque toujours équivalentes à celles obtenues par transformation sous les éléments X_s).

Mais $e^{-i v(H(an))} = e^{-i(v_1 t_1 + \dots + v_n t_n)}$

où $t_1, t_2, \dots, t_n$, sont les composantes de H dans une base donnée de $\mathfrak{h}_{p_0}$ et $v_1, \dots, v_n$ les composantes de v dans la même base.

Nous avons vu, d'autre part, lors d'un calcul relatif aux éléments du groupe de Weyl (§ 7), que les éléments de celui-ci étaient engendrés par les permutations et les inversions des éléments $t_1, \dots, t_n$. Cette condition nous montre immédiatement que les représentations $\pi_v^{\eta, i}$ seront toutes irréductibles si $|v_i| \neq |v_j| \quad \forall i \neq j$

Ainsi, mis à part sur quelques hyperplans, pour lesquels nous ne pouvons rien dire, toutes les représentations unitaires induites dans les $\mathcal{H}_i^\eta$ sont irréductibles.

Définition.— Soit G un groupe topologique, K un sous-groupe fermé de G . Une représentation π de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dite de classe 1 si elle est unitaire irréductible et si il existe un vecteur $e \neq 0$, $e \in \mathcal{H}$, tel que $\pi(k)e = e \quad \forall k \in K$.

Comme nous venons de le voir $\pi_{\mathcal{V}}^{\eta, i}$ est une représentation de G induite dans $\mathcal{H}_i^{\eta}$ par la représentation $t \rightarrow e^{-v(H(a))}_{L_m}$ de T .

Nous avons vu au § 10 qu'à une telle représentation nous pouvions associer une fonction sphérique

$$\phi_{\delta}^L(g) = \int_K \chi_{\delta}^L(kgk^{-1}) dk$$

$$\text{où } \chi_{\delta}^L(th) = \iiint \chi_{\delta}(mh) \operatorname{Tr}(L(t) L^{-1}(m)) dm \quad \text{avec } g = th \quad t \in T \quad h \in K$$

Il pourra donc en principe exister plusieurs fonctions sphériques de type δ différentes associées à $\pi_{\mathcal{V}}^{\eta, i}$. Il suffira en effet, pour que ϕ_{δ}^L soit non nulle, que η soit "contenu" dans δ .

Il est clair d'autre part que les mêmes fonctions sphériques apparaissent dans $\pi_{\mathcal{V}}^{\eta, i}$ et dans $\pi_{\mathcal{V}}^{\eta, j}$ ($i \neq j$), ce qui montre, une fois de plus, que ces représentations sont équivalentes !

Finalement, si δ est la représentation triviale de K , nous avons que,

$$\chi_{\delta}^L(t) = \int \operatorname{Tr}(L(t) L^{-1}(m)) dm.$$

Posons $t = m'a$ et $L(t) = L(m') \alpha(a)$ alors,

$$\chi_{\delta}^L(t) = \int L(m) dm \quad \alpha(a)$$

Mais $\int L(m) dm$ ne sera non nul que si $L(m)$ contient la représentation triviale de M . Ainsi, comme L est irréductible en tant que représentation de M , L devra être la représentation triviale de M .

Nous voyons donc qu'à δ trivial sera associé la fonction sphérique

$$\phi_{\delta}^1(g) = \int \alpha(kak^{-1}) dk = \int e^{-v(H(ak^{-1}))} dk.$$

Comme η est maintenant le caractère trivial de M (noté η_0), nous avons que,

$$Q_{1,1}^{\eta_0} = Q^{1,0} = \int V_m dm$$

où $k \rightarrow V_k$ est la représentation régulière droite de K . Par les relations d'orthogonalité cette intégrale n'aura que sa composante triviale non nulle. Ainsi ψ_0 (fonction caractéristique de K) appartiendra à $\mathcal{H}^{\eta_0}$ et la représentation $\pi_{\mathcal{V}}^{1,0}$ sera bien de classe 1 lorsque $\pi_{\mathcal{V}}$ sera unitaire.

Interprétation de la formule de Plancherel

Soient ϕ une fonction sphérique de hauteur 1 et de type $\mathbf{1}$ (trivial), $\phi^{L(x_i)}$ la translatée de ϕ par $x_i \in G$, $V\phi$ l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires finies de translatées de ϕ .

Définissons maintenant une forme sesquilinéaire, dans $V\phi$, par la relation,

$$(f, g) = \sum \lambda_i \bar{\mu}_j (x_j^{-1} x_i)$$

où $f = \sum \lambda_i \phi^{L(x_i)}$ et $g = \sum \mu_j \phi^{L(x_j)}$.

Comme ϕ est de type positif (f, f) est positive ou nulle quel que soit $f \in V\phi$. De plus $(\cdot, \cdot)$ est manifestement invariante par les translations. Soit alors N le noyau de la forme sesquilinéaire définie ci-dessus et $\mathcal{H}$ le complété de l'espace quotient $V\phi/N$ par le produit scalaire évident. La représentation π , induite dans $\mathcal{H}$ par les translations dans $V\phi$, est alors unitaire et laisse le vecteur e , correspondant à ϕ dans le quotient, invariant par $\pi(k) \quad \forall k \in K$.

On montre alors que π est irréductible, donc de classe 1.

Soit maintenant U , une représentation unitaire de G dans un sous-espace $\mathcal{H}'$ de $L^2(G/K)$, induite par les translations.

Définissons maintenant l'application $\mathcal{H}$ par

$$f^{\mathcal{H}}(g) = \int f(kg) dk \quad f \in L^2(G/K).$$

Alors, si $f \in \mathcal{H}'$, $f^{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ comme élément de la fermeture. Ainsi tout sous-espace invariant irréductible $\mathcal{H}'$ contient un élément invariant par $U(k) \quad \forall k \in K$. Comme U est unitaire irréductible, il est de classe 1. Par conséquent, si $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ désigne l'image de $\mathcal{H}'$ par l'application $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ est un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{H}$.

Comme d'autre part deux représentations de classe 1 sont équivalentes si elles ont même fonction sphérique, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont équivalents pour un certain ϕ .

Remarquons finalement que si $f = \sum \lambda_i \phi^{L(x_i)} \in V\phi$

$$f^{\mathcal{H}}(g) = \int \sum \lambda_i \phi(x_i^{-1} kg) dk = \sum \lambda_i \phi(x_i^{-1}) \phi(g) \quad \text{par}$$

la propriété fonctionnelle des fonctions sphériques.

Ceci montre que dans le cas des espaces V_ϕ l'espace unidimensionnel $V_\phi = \mathbb{C}\phi$. La formule de Plancherel (13;2), qui établit un isomorphisme entre les espaces $L^2(\Lambda)$ et $L(G)$, définit donc implicitement une factorisation de $L^2(G/K)$ en sous-espaces invariants irréductibles pour les représentations de classe 1, induites par la représentation "régulière" de G dans $L^2(G/K)$.

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport de Messieurs les professeurs

W. Soerensen, R. Bader et J.-P. Amiet

autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 18 janvier 1969

Le doyen :

J. Rossel

Jean Rossel

